

1. OBJETS DES ÉTUDES EN DIDACTIQUE

1.1. Le savoir mathématique et la transposition didactique

Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.

En plus des vertus scientifiques qu'on lui connaît, elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement. Elle permet à chaque instant de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites et, ainsi, d'organiser l'acquisition de nouveaux savoirs à l'aide des acquisitions antérieures. Elle promet donc à l'étudiant et à son professeur un moyen d'ordonner leur activité et d'accumuler dans un minimum de temps un maximum de « savoirs » assez proches du « savoir savant ». Évidemment, elle doit être complétée par des exemples et des problèmes dont la solution exige la mise en œuvre de ces savoirs.

Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés et des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits, et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le « vrai » fonctionnement de la science impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une genèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissu d'activités où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent *transposition didactique* cette opération. Elle a son utilité, ses inconvénients et son rôle, même pour la construction de la science. Elle est à la fois inévitable, nécessaire et en un sens, regrettable. Elle doit être mise sous surveillance.

* Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2) 33-115.

1.2. Le travail du mathématicien

Avant de communiquer ce qu'il pense avoir trouvé, un chercheur doit d'abord le déterminer : il n'est pas facile de distinguer, dans le labyrinthe des réflexions, celles qui sont susceptibles de devenir un savoir nouveau et intéressant pour les autres ; les démonstrations obtenues sont rarement celles des conjectures envisagées ; tout un réaménagement des connaissances voisines, antérieures ou nouvelles, doit être entrepris.

Il faut aussi supprimer toutes les réflexions inutiles, la trace des erreurs commises et des cheminements erratiques. Il faut cacher les raisons qui ont conduit dans cette direction et les conditions personnelles qui ont présidé à la réussite, problématiser habilement les marques même un peu banales, mais éviter les trivialités... Il faut encore chercher la théorie la plus générale dans laquelle les résultats restent valables... Ainsi, le producteur du savoir dépersonnalise, contextualise et détemporalise le plus possible ses résultats.

Ce travail est indispensable pour que le lecteur puisse prendre connaissance de ces résultats et se convaincre de leur validité sans faire lui-même le même cheminement pour leur découverte, tout en bénéficiant des possibilités qu'ils offrent pour leur utilisation.

D'autres lecteurs alors, transforment à leur tour ces résultats, les reformulent, les appliquent, les généralisent, si tels sont leurs besoins. Il les détruisent à l'occasion, soit en les identifiant à des savoirs déjà connus, soit en les incluant dans des résultats plus forts, en les oubliant simplement... voire en les montrant faux. Ainsi l'organisation des connaissances dépend, dès leur origine, des exigences imposées à leur auteur par leur communication. Elle ne cesse pas d'être ensuite modifiée pour les mêmes motifs au point que leur sens change assez profondément : la transposition didactique se déroule en grande partie dans la communauté scientifique et se poursuit dans les milieux cultivés (la noosphère¹ plus exactement). Le fonctionnement de cette communauté est basé sur les rapports qu'entretiennent l'investissement et la reprise personnels et contextuels de questions mathématiques et le rejet de cet investissement pour la production d'un texte du savoir aussi objectif que possible.

1. *NdE* : Le terme de « noosphère » fut forgé dans les années 20 par Teilhard de Chardin. Dit simplement, ce terme désigne le monde des idées, des choses de l'esprit. Il a été introduit par Yves Chevallard en didactique des mathématiques, de façon parodique, dans le contexte de la construction de la théorie de la transposition didactique. Il s'agit alors de désigner la sphère où l'on pense le fonctionnement du système didactique (Chevallard 1985, 1992, p. 25 ; Arsac 1992).

1.3. Le travail de l'élève

Le travail intellectuel de l'élève doit être par moments comparable à cette activité scientifique. Savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconstruise celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc.

Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés.

1.4. Le travail du professeur

Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du travail du chercheur, il doit produire une *recontextualisation* et une *repersonnalisation* des connaissances. Elles vont devenir la connaissance d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle, à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. Chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique, car on ne crée pas les probabilités dans le même genre de contexte et de rapports avec le milieu que ceux dans lesquels on invente ou utilise l'arithmétique ou l'algèbre.

Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves.²

Mais il doit aussi donner les moyens à ses élèves de retrouver dans cette histoire particulière qu'il leur a fait vivre, ce qu'est le sa-

2. *NdE* : voir Introduction, note 1.

voir culturel et communicable qu'on a voulu leur enseigner. Les élèves doivent à leur tour *redécontextualiser* et *redépersonnaliser* leur savoir et ceci de façon à identifier leur production avec le savoir qui a cours dans la communauté scientifique et culturelle de leur époque.

Bien sûr, il s'agit d'une simulation, qui n'est pas la « vraie » activité scientifique, de même que le savoir présenté de façon axiomatique n'est pas le « vrai » savoir.

1.5. Quelques questions préliminaires naïves et fondamentales

Cette évocation de la communication du savoir paraît assez classique. Elle appelle pourtant quelques remarques et soulève des questions intéressantes.

Tout d'abord, l'accent y est mis fortement sur toutes les activités sociales et culturelles qui conditionnent la création, l'exercice et la communication du savoir et des connaissances.

L'approche classique considère comme centrale l'activité cognitive du sujet qui doit d'abord être décrite et comprise de façon relativement indépendante. Elle suppose ensuite, au moins implicitement, que les connaissances sur la connaissance nécessaires à l'enseignement, doivent d'abord s'établir elles aussi de façon indépendante, par exemple, par la mathématique et l'épistémologie. Il en est de même pour les connaissances sur les rapports sociaux spécifiques de l'éducation, etc. L'approche classique consiste alors à tirer des conséquences pour l'enseignement de ces savoirs préalables : elle le fait directement, c'est-à-dire avec le seul appui de réflexions « naïves ».

Il y a là plus qu'une nuance : les savoirs importés de disciplines fondamentales permettent-ils à eux seuls, sans modifications et indépendamment les uns des autres, d'expliquer les phénomènes d'enseignement et de produire de façon contrôlée les modifications désirées ? Faut-il, au contraire, créer des concepts nouveaux, un champ de connaissances et de méthodes proches pour étudier les situations didactiques ?

Une des hypothèses fondamentales de la didactique consiste à affirmer que seule l'étude globale des situations qui président aux manifestations d'un savoir, permet de choisir et d'articuler les connaissances d'origines différentes, nécessaires pour comprendre les activités cognitives du sujet, ainsi que la connaissance qu'il utilise et la façon dont il la modifie.

Une deuxième hypothèse, plus forte, consiste à dire que l'étude première des situations (didactiques) devrait finalement permettre de dériver ou de modifier les concepts nécessaires actuellement importés des autres champs scientifiques :

Existe-t-il une « variété didactique » des concepts de sens, de mémoire, de structure, de décimal, etc., inconnue en linguistique, en psychologie ou en mathématique ?

L'enseignement, lui aussi, est conçu comme un projet social : celui de faire approprier à un élève un savoir constitué ou en voie de constitution. Ce point de vue remet au centre des préoccupations d'enseignement des débats culturels et politiques sur le savoir mais en les traitant plutôt comme des objets d'études faisant partie des situations, que comme des préalables philosophiques.

L'apprentissage n'est-il pas un acte essentiellement individuel ? Est-il nécessaire de le replacer dans un contexte aussi vaste pour le comprendre ? L'enseignement individuel n'est-il pas une sorte de condition optimale que seules des conditions économiques empêchent de réaliser ?

Même en admettant que des savoirs sur les situations de mise en œuvre, d'appropriation et d'enseignement des connaissances peuvent jouer un certain rôle technique, en tant que moyen pour l'enseignement, il reste une question importante : une fois élevés au rang d'objets culturels, ces savoirs ne vont-ils pas perturber profondément la communication et peut-être même la construction du savoir ? Ce dernier est fondé, nous l'avons vu, sur le rejet et l'oubli des circonstances qui l'ont provoqué.

Pourquoi la possession du savoir lui-même, jointe à des connaissances générales de sciences humaines, à un peu de bon sens et, bien sûr, à des qualités pédagogiques qu'aucun enseignement ne saurait vraiment développer, ne suffirait-elle pas pour tous les professeurs, avec tous les élèves, comme elle le fait avec quelques-uns ?

Ensuite, on peut se demander dans quelle mesure cette référence au fonctionnement de la recherche est bien nécessaire et pertinente pour l'étude de l'apprentissage et surtout de l'enseignement. Jusqu'à quel point y a-t-il une ressemblance et sous quelles conditions ?

Il semble qu'une bonne théorie épistémologique accompagnée d'une bonne ingénierie didactique soient indispensables pour répondre à ces questions.

La didactique étudie la communication des savoirs et tend à théoriser son objet d'étude, mais elle ne peut relever ce défi qu'à deux conditions :

- mettre en évidence des phénomènes spécifiques que les concepts originaux qu'elle propose paraissent expliquer,
- indiquer les méthodes de preuves spécifiques qu'elle utilise pour cela.

Ces deux conditions sont indispensables pour que la didactique des mathématiques puisse connaître de façon scientifique son objet d'étude et donc permettre des actions contrôlées sur l'enseignement.

2. PHENOMENES DE DIDACTIQUE

Des phénomènes liés au contrôle de la transposition didactique ont pu être mis en évidence dans des cadres très différents : le même phénomène peut régir l'intimité d'une leçon particulière ou concer-ner toute une communauté pendant des générations.

Identifier ces phénomènes revient à construire un « modèle » des protagonistes en présence, des relations et des contraintes qui les lient et à montrer que le jeu de ces contraintes produit bien des effets et le déroulement observés.

Il est plus commode dans un texte relativement court de prendre des exemples déjà connus des lecteurs que d'exposer dans leur complexité les cas réellement traités.

2.1. L'effet Topaze et le contrôle de l'incertitude

La première scène du célèbre « Topaze » de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux : Topaze fait une dictée à un mauvais élève.³

Ne pouvant accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe demandée il « suggère » la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents : « ... des moutons étaient réunis dans un parc... » il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire... « des moutonsses étai-hunt... » le problème est complètement changé ! Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre ce « s ». On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un « s » à « moutons » : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.

La réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Évidemment les connaissances nécessaires pour produire ces réponses changent leur signification aussi. En prenant des questions de plus en plus faciles, il essaie d'obtenir la signification maximum pour le maximum d'élèves. Si les connaissances visées disparaissent complètement : c'est « l'effet Topaze ». Le maintien du sens à travers les changements de questions est sous le contrôle des connaissances des maîtres dans la discipline enseignée mais le choix des

situations d'apprentissage et leur gestion, habituellement laissés au « bon sens » des professeurs, sont actuellement l'objet d'actives recherches tant théoriques que d'ingénierie didactique.⁴

2.2. L'effet « Jourdain » ou le malentendu fondamental

L'effet « Jourdain » – ainsi nommé par référence à la scène du « Bourgeois Gentilhomme »⁵ où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles – est une forme d'effet Topaze.

Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales.

Exemple : L'élève à qui l'on faisait faire des manipulations un peu étranges avec des pots de yaourt ou des images colorées se voyait déclarer : « tu viens de découvrir un groupe de Klein ».

D'une façon moins grossière, le désir d'insérer la connaissance dans des activités familières peut conduire le professeur à substituer à la problématique véritable et spécifique, une autre, par exemple métaphorique ou métonymique et qui ne donne pas un sens correct à la situation. Souvent les deux problématiques sont présentes, juxtaposées et le professeur essaie d'obtenir « le meilleur » compromis.

Certaines méthodes pédagogiques axées sur les préoccupations de l'enfant provoquent souvent cet effet, mais la réforme des années soixante et l'usage des structures mathématiques qu'elles ont proposé ont été évidemment aussi une puissante incitation à ce jeu.

En même temps, l'idéologie structuraliste lui offrait une justification épistémologique. Il s'agit alors d'un double effet « Jourdain » : le premier au niveau des relations de l'élève avec le professeur : l'élève traite un exemple et le maître y voit la structure. Le second au niveau des relations des didacticiens ou des mathématiciens avec le professeur. Les premiers plaquent une justification philosophique et scientifique sur la pratique du second et la sacralisent, la reconnaissance de la structure est devenue l'activité scientifique.

2.3. Le glissement métacognitif

Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses pro-

4. NdE : à propos de l'ingénierie didactique voir (Artigue 1990).

5. NdE : comédie-ballet de Molière (1670).

3. NdE : Pagnol (1928) *Topaze*, Acte 1, scène 1.

pres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique.

Cet effet peut se composer plusieurs fois, concerner toute une communauté et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs. L'exemple le plus frappant est probablement celui qui concerne l'usage des graphes dans les années soixante pour enseigner les structures, méthode à laquelle s'est attaché le nom de G. Papy.

A la fin des années trente, la théorie des ensembles quitte sa fonction scientifique initiale pour devenir moyen d'enseignement afin de satisfaire les besoins qu'ont les professeurs d'une mathématique et d'un formalisme fondamental. De ce fait, ils sont obligés d'inviter des étudiants à un contrôle sémantique de cette théorie (dite alors « naïve »). Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique ». Cet usage déjà didactique de la théorie des ensembles rendra possible pour les autres théories un exposé axiomatique dont la négociation sera plus classique.

Ce moyen d'enseignement devient l'objet d'enseignement pour des enfants de plus en plus jeunes. Le contrôle sémantique est confié à un « modèle » qui remonte à Euler⁶ et qui fait appel à des graphes divers⁷. Le « modèle » n'est pas en fait un modèle correct, il ne permet pas le contrôle attendu et provoque des difficultés d'enseignement. Du fait de ces difficultés, ce « moyen » devient à son tour objet d'enseignement et se surcharge de conventions, de langages spécifiques à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées.

C'est l'effet de « glissement métacognitif ». Il serait naïf de croire que le bon sens aurait permis d'échapper aux conséquences assez extravagantes auxquelles ce processus a conduit. La force des effets

6. Euler (1768) *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Voir, en particulier, la Lettre XXXIV du 14 février 1761 et les figures 39 à 89.

7. Cercles d'Euler, diagrammes de Venn, Papygrammes (ou patates) de Papy. *NdE* : le mot « patate », adopté par les élèves et les enseignants, ne fut utilisé qu'oralement par Georges Papy qui lui préférerait à l'écrit le mot « figure » (Papy 1964), le terme « Papygramme » fut introduit par Frédérique Papy (Papy F. 1970).

didactiques est incoercible dès lors que le professeur ne peut se soustraire à l'obligation d'enseigner coûte que coûte. Plus le public engagé dans la négociation est vaste et plus le processus échappe au contrôle « naïf ».

D'ailleurs le bon sens, comme n'importe quel autre facteur correcteur, ne peut jouer un rôle dans les processus sociaux sans la médiation d'une structure sociale adéquate. Il existe des preuves que ce type d'erreurs n'est pas l'effet de la bêtise ni, dans la plupart des cas celui de l'ignorance de la discipline mathématique ; il l'est à peu près dans la mesure « où la maladie est imputable à des erreurs de comportement » – s'il est permis d'utiliser une métaphore hardie.

2.4. L'usage abusif de l'analogie

L'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets « Topaze ». C'est pourtant une pratique naturelle ; si des élèves ont échoué dans leur apprentissage, il leur faut donner une nouvelle chance sur le même sujet. Ils le savent. Même si le professeur dissimule le fait que le nouveau problème ressemble à l'ancien, les élèves vont chercher – c'est légitime – la solution qu'on leur a déjà donnée. Cette réponse ne signifie pas qu'ils la trouvent idoine pour la question posée mais seulement qu'ils ont reconnu à des indices, peut-être tout à fait exogènes et non contrôlés, que le professeur voulait qu'ils la produisent.

Ils obtiennent la solution par une lecture des indications didactiques et non pas un investissement du problème. Et ils y ont intérêt car après plusieurs échecs sur des problèmes semblables mais non justifiés, non reconnus, le professeur s'appuiera sur ces analogies soudain renouvelées pour reprocher à l'élève sa résistance opiniâtre (cet effet est utilisé par R. Devos dans son sketch des deux bouts d'un bois)⁸. « Ça fait un bout de temps que je vous le dis ! »

2.5. Le vieillissement des situations d'enseignement

Le professeur rencontre des difficultés à reproduire la même leçon, bien qu'il s'agisse de nouveaux élèves : la reproduction exacte de ce qu'il a dit ou fait précédemment n'a pas le même effet et le plus souvent les résultats sont moins bons, mais il éprouve aussi et peut-être par conséquent, une certaine réticence à cette reproduction. Il éprouve un besoin assez fort de changer au moins la formulation de

8. *NdE* : Devos R. 1976, pp.149-151.

un certain renouvellement qui risque de compromettre les reproductions futures. Les moyens de l'équilibre n'étant pas connus, le système tend à faire porter le renouvellement sur des facteurs qui n'ont pas beaucoup d'influence sur l'objet principal de l'enseignement : les modifications de programme obéissent à des processus semblables à ceux de la mode par rapport à l'habillement.

Cette question du vieillissement et de l'effet du temps didactique¹⁰ soulève une question essentielle pour la didactique : qu'est-ce qui est réellement reproduit au cours d'une leçon ?

Un professeur qui reproduit *la même histoire*, la même succession des mêmes activités et des mêmes déclarations de sa part et de la part des élèves, a-t-il reproduit le même *fait didactique* qui a produit les mêmes effets du point de vue du sens ?¹¹

Il n'existe pas de moyen naïf de différencier une bonne reproduction d'une leçon – qui donne dans les mêmes conditions un déroulement identique et aussi un même sens aux connaissances acquises par l'élève – d'une mauvaise reproduction de cette leçon – qui dans les mêmes conditions, donne un « déroulement » identique mais un sens différent aux connaissances acquises. Dans le deuxième cas, la similitude du déroulement est obtenue par des interventions discrètes mais répétées du professeur qui transforment toute la situation sans affecter apparemment son « histoire ».

Savoir ce qui est reproduit dans une situation d'enseignement est justement l'objet de la didactique, ce n'est pas un résultat d'observation, mais celui d'une analyse s'appuyant sur la connaissance des phénomènes qui définissent ce qu'ils laissent invariant.

3. ÉLÉMENTS POUR UNE MODÉLISATION

Ces différents phénomènes peuvent être observés aussi bien dans des relations particulières entre deux personnes que dans des relations beaucoup plus complexes impliquant des organismes et des centaines de personnes.¹²

10. Les objets de recherche de Y. Chevallard et A. Mercier. *NdE* : voir par exemple Chevallard et Mercier (1983) ou Mercier (1992), et Brousseau et Centeno (1991).

11. Cette question est étudiée dans l'article « Didactique des décimaux » : l'obsolescence des situations, puis reprise par M. Artigue dans sa thèse sur la reproductibilité. *NdE* : voir à ce sujet Artigue (1986).

12. *NdE* : La théorisation proposée par Guy Brousseau ne saurait être confinée aux situations d'enseignement aux petits enfants et au système

son exposé ou de ses instructions, les exemples, les exercices, et si possible la structure même de la leçon. Ces effets augmentent avec le nombre des reproductions et sont d'autant plus forts que la leçon comprend plus d'interactions entre le maître et l'élève : les leçons comprenant un exposé suivi d'exercices ou une simple instruction suivie d'une situation d'apprentissage ne demandant pas d'intervention du professeur vieillissent moins vite. Cet effet a été observé directement à l'École Jules Michelet de Talence⁹ dans de nombreux cas où les maîtres étaient engagés à reproduire une leçon déterminée. Mais les efforts de renouvellement tentés par les enseignants dans le cas où ils sont libres dans leur travail sont un indice aussi sûr et aisément observable.

Ce phénomène, comme les précédents, peut être observé au niveau d'une classe mais aussi dans l'ensemble du système éducatif et entre d'autres partenaires : les programmes et les instructions ministérielles (ou les curriculums dans d'autres pays) sont le moyen à peu près unique d'explicitation des exigences didactiques du corps social envers les professeurs et le moyen de convenir de la répartition des tâches entre eux. En regard de la complexité des mécanismes à contrôler, ces textes généralement assez courts, et qui doivent laisser ouvert l'essentiel des questions pertinentes, apparaissent comme tout à fait inadéquats. Leurs modifications périodiques apparaissent, elles, complètement dérisoires, qu'on les compare entre elles ou qu'on les compare à l'importance que semblent leur accorder les professeurs et l'administration. Les textes pour l'école primaire, depuis les années 1980, n'offrent que des différences minimales sur l'essentiel et ne diffèrent que sur des nuances.

Les modifications de programmes sont l'objet de projections des désirs des professeurs pour le renouvellement de leurs situations didactiques en réponse au vieillissement de leur cours.

La disproportion énorme entre cet investissement de la nouveauté et la stabilité étonnante des pratiques d'enseignement est aussi un indice des contraintes qui interviennent dans la régulation du vieillissement : le temps de réponse à toute modification du système éducatif est très élevé et les rétroactions très faibles et aléatoires. La meilleure garantie contre la dérive est donc une inertie importante. Mais l'activité d'enseignement elle-même réclame un investissement personnel intense de la part du professeur et cet investissement ne peut se maintenir que s'il est renouvelé. La reproduction exige donc

9. *NdE* : L'école Jules Michelet à Talence, près de Bordeaux, est le lieu où Guy Brousseau a organisé les moyens pour l'observation de situations de classe organisées pour la recherche (voir aussi l'Annexe à ce propos).

Est-il possible de « modéliser » tout un système éducatif par un système « enseignant » défini par quelques-unes des relations qu'il entretient avec un système « enseigné » qui représente lui, des centaines d'élèves dont la diversité semble justement la première source des difficultés des enseignants. C'est un pari incontournable du processus de théorisation.

Les problèmes que soulèvent les approches systémiques dont cette méthode se rapproche seront discutés plus tard.

La forme dans laquelle nous avons décrit rapidement ces phénomènes prépare leur modélisation. Il s'agit maintenant d'identifier les relations fondamentales qu'il faut retenir.

Il convient toutefois de s'abstenir encore d'une formalisation excessive et prématurée. Une formulation plus rigoureuse interviendra à une étape ultérieure.

3.1. Situation didactique, situation adidactique¹³

Dans la conception la plus générale de l'enseignement, le savoir est une association entre les bonnes questions et les bonnes réponses. L'enseignement pose un problème que l'élève doit résoudre : si l'élève répond, il montre par-là, qu'il sait, sinon, se manifeste un besoin de savoir qui appelle une information, un enseignement. A priori, toute méthode qui permet de mémoriser les associations favorables est acceptable.

La maïeutique socratique limite ces associations à celles que l'élève peut effectuer lui-même. Cette restriction a pour objet de garantir la compréhension du savoir par l'élève, puisqu'il le produit. Mais on est alors conduit à supposer que l'élève possédait déjà ce savoir, soit qu'il l'ait depuis toujours (réminiscence), soit qu'il le construise lui-même par son activité propre et isolée. Tous les procédés où le maître ne donne pas lui-même la réponse, sont acceptables pour accoucher l'élève de ce savoir.

Le schéma socratique peut être perfectionné si on suppose que l'élève est capable de tirer son savoir de ses propres expériences, de

scolaire, comme dans cet article. Le lecteur peut par exemple se reporter à Bessot et al. (1993), ou Rogalski et Samuray (1994) pour des exemples de fonctionnement de la Théorie des situations didactiques dans le cas de l'enseignement ou de la formation professionnelle.

13. *NdE* : Parce que le terme « adidactique » est largement adopté, nous avons choisi d'en fixer l'orthographe selon l'usage le plus courant du français utilisant le « a » privatif, abandonnant la première écriture, « a-didactique », dont le but était probablement de faciliter la prise de conscience de la signification de ce concept nouveau.

ses propres interactions avec son milieu, même si ce milieu n'est pas organisé à des fins d'apprentissage : l'élève apprend en regardant le monde (hypothèse empiriste-sensualiste) ou en faisant des hypothèses parmi lesquelles son expérience lui permet de choisir (hypothèse a-prioriste) ou encore dans une interaction plus complexe faite d'assimilations et d'accommodations telles que Piaget les décrit.

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.

Ce processus psycho-génétique piagétien est à l'opposé du dogmatisme scolastique. L'un ne semble rien devoir à l'intention didactique, alors que l'autre lui doit tout. En attribuant à l'apprentissage « naturel » ce qui repose sur l'art d'enseigner selon le dogmatisme, la théorie de Piaget risque de soulager le maître de toute responsabilité didactique : ceci constitue un paradoxal retour à une sorte d'empirisme ! Mais un milieu sans intentions didactiques est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière.

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des « problèmes » qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation *adidactique*¹⁴. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons *situation*

14. En ce sens que disparaît d'elle l'intention d'enseigner (elle est toujours spécifique du savoir). Une situation pédagogique non spécifique d'un savoir ne serait pas dite adidactique mais seulement non-didactique.

3.2. Le contrat didactique

Ainsi, dans toutes les situations didactiques, le professeur tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse. Théoriquement, le passage de l'information et de la consigne du professeur à la réponse attendue, devrait exiger de la part de l'élève la mise en œuvre de la connaissance visée, qu'elle soit en cours d'apprentissage ou déjà connue. Nous savons que le seul moyen de « faire » des mathématiques, c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère.

Mais si l'élève refuse ou évite le problème, ou ne le résout pas ? Le maître a alors l'obligation sociale de l'aider et même parfois de se justifier d'avoir posé une question trop difficile.

Alors se noue une relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'élève, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du « contenu » : la connaissance mathématique visée.

C'est pourquoi nous ne pouvons pas ici détailler ces obligations réciproques, d'ailleurs ce sont en fait *les ruptures du contrat* qui sont importantes. Mais examinons-en quelques conséquences immédiates.

- Le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances, et il doit « reconnaître » cette appropriation quand elle se produit.

- L'élève est supposé pouvoir satisfaire ces conditions.

- La relation didactique doit « continuer » coûte que coûte.

- Le professeur assure donc que les acquisitions antérieures et les conditions nouvelles donnent à l'élève la possibilité de l'acquisition. Si cette acquisition ne se produit pas, s'ouvre un procès à l'élève qui n'a pas fait ce que l'on est en droit d'attendre de lui mais aussi un procès au maître qui n'a pas fait ce à quoi il est tenu (implicitement).

Remarquons que ce jeu d'obligations n'est pas exactement un contrat :

D'abord, il ne peut pas être complètement explicitable, dès lors qu'il prétend porter sur le résultat de l'action d'enseigner. Il n'existe pas de moyens connus repérés et suffisants permettant de construire des savoirs nouveaux ou pour obtenir contre toute défense l'appropriation par l'élève des savoirs visés. Et si le contrat ne porte

fondamentale. Mais l'élève ne peut pas résoudre d'emblée n'importe quelle situation adidactique, le maître lui en ménage donc qui sont à sa portée. Ces situations adidactiques aménagées à des fins didactiques déterminent la connaissance enseignée à un moment donné et le sens particulier que cette connaissance va prendre du fait des restrictions et des déformations ainsi apportées à la situation fondamentale.

Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc. L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation est la *situation didactique*.

L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence adidactique et ce qui est d'origine didactique. La situation adidactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais, dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller, dès que possible, la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective.

Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. Mais l'évolution de la situation modifie le contrat qui permet alors l'obtention de situations nouvelles. De la même façon, la connaissance est ce qui s'exprime par les règles de la situation adidactique et par les stratégies. L'évolution de ces stratégies requiert des productions de connaissances qui permettent à leur tour la conception de nouvelles situations adidactiques.

Le contrat didactique n'est pas un contrat pédagogique général. Il dépend étroitement des connaissances en jeu.

Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. Nous verrons que l'on peut concevoir ces situations comme des jeux formels et que cette conception favorise la compréhension et la maîtrise des situations d'enseignement.

que sur les règles de comportement du professeur ou de l'élève, son respect scrupuleux condamnera la relation didactique à l'échec.

Il est nécessaire cependant que le professeur accepte la responsabilité des résultats et qu'il assure à l'élève les moyens effectifs de l'acquisition des connaissances. Cette assurance est fallacieuse mais indispensable pour lui permettre de résoudre des problèmes dont on ne lui a pas enseigné la solution bien qu'il ne voie pas, a priori, les choix qui lui sont offerts et leurs conséquences, et qu'il soit donc dans un cas patent d'irresponsabilité juridique.

Nous verrons qu'un contrat de ce genre, totalement explicite, est voué à l'échec. En particulier les clauses de rupture et l'enjeu du contrat ne peuvent pas être décrits à l'avance. La connaissance sera justement ce qui résoudra les crises issues de ces ruptures ; elles ne peuvent pas être pré-définies. Pourtant, au moment de ces ruptures, tout se passe comme si un contrat implicite liait l'enseignant et l'enseigné : surprise de l'élève qui ne sait pas résoudre le problème et qui s'insurge de ce que le maître n'ait pas su l'en rendre capable, surprise du maître qui estimait raisonnablement suffisantes ses prescriptions... révolte, négociation, recherche d'un nouveau contrat qui dépend du nouvel « état » des savoirs... acquis et visés.

Le concept théorique en didactique n'est donc pas le contrat (le bon, le mauvais, le vrai, ou le faux contrat) mais le *processus de recherche d'un contrat* hypothétique. C'est ce processus qui représente les observations et doit les modéliser et les expliquer.

3.3. Un exemple de la dévolution d'une situation adidactique

Dans un jeu sur micro-ordinateur, de jeunes enfants (5 ans) doivent, avec le crayon optique, conduire un à un, des lapins dans un pré et des canards dans une mare. Les règles de la manipulation ne présentent pas de difficultés insurmontables à cet âge. Les enfants peuvent interpréter que la disparition puis la réapparition d'un animal à un autre endroit, correspond à un déplacement. Mais il s'agit bientôt d'autre chose que d'une manipulation selon la règle : le maître veut que l'élève pointe *tous* les lapins l'un après l'autre et une seule fois, *avant* de les diriger vers le pré, afin de développer chez lui l'énumération d'une collection. La suite des opérations à effectuer n'est pas donnée dans la consigne, elle est à la charge de l'élève. La dévolution de cette tâche se fait par étapes :

Première étape : Approche purement ludique

Les élèves n'ont pas encore compris que parmi les issues du jeu, certaines sont souhaitables : tous les lapins vont dans le pré et dansent une petite ronde, et d'autres sont non souhaitables : les lapins oubliés deviennent rouges et émettent un grognement.

Les enfants jouent, piquent les lapins et sont heureux de provoquer un effet, quel qu'il soit.

Deuxième étape : Dévolution d'une préférence

Les élèves ont bien compris quel est l'effet souhaité (par exemple, on a supprimé tout effet des fausses manipulations) mais ils attribuent les résultats, bons ou mauvais, à une sorte de fatalité ou de hasard.

Ce genre d'interprétation est adéquat pour de nombreux jeux ; à « la bataille » ou aux « petits chevaux », le plaisir naît de l'attente de ce que le sort réserve, alors que le joueur ne prend aucune décision.

Troisième étape : Dévolution d'une responsabilité et d'une causalité

Pour accepter une responsabilité dans ce qui lui arrive, l'élève doit considérer ce qu'il fait comme un choix parmi diverses possibilités puis envisager une relation de causalité entre les décisions qu'il a prises et leurs résultats.

A cette étape, les élèves peuvent, après coup, envisager que le déroulement du jeu aurait pu être différent. Cela suppose qu'ils peuvent se souvenir de certaines de leurs actions et plus précisément de ce qui, en elles, était pertinent ou non.

Cette dévolution est délicate : la plupart des enfants sont prêts à accepter du maître l'idée qu'ils sont responsables du résultat du jeu, bien qu'ils soient incapables d'établir à ce moment-là qu'ils auraient pu en obtenir un meilleur par un choix approprié. Or, seule la connaissance de cette liaison justifierait la dévolution.

Si l'élève résout assez vite le problème, le fait d'avoir accepté a priori le principe de sa responsabilité n'a été qu'un prologue nécessaire à l'apprentissage, ce dernier vient justifier après coup cette responsabilisation, en donnant à l'élève les moyens de l'assumer et, finalement, d'échapper à la culpabilité.

Mais pour l'élève qui ne peut pas franchir la difficulté et relier, par la connaissance, son action aux résultats obtenus, la responsabilisation doit être renégociée sous peine de provoquer des sentiments de culpabilité et d'injustice très vite préjudiciables aux apprentissages ultérieurs et à la notion même de causalité.

Quatrième étape : Dévolution de l'anticipation

La relation entre la décision et le résultat doit être envisagée *avant* la décision, l'élève prend alors à sa charge des anticipations qui excluent toute intervention occulte. Même si elle n'est pas encore entièrement maîtrisée, cette anticipation est considérée comme étant de la responsabilité cognitive du joueur et non pas seulement sa responsabilité sociale.

connaître – après coup – l'objet d'enseignement attaché au jeu des lapins. Il pourra aborder des problèmes d'énumération et de combinatoire plus proches des problèmes scientifiques et définir alors ce qu'il doit apprendre, ce qu'il doit résoudre et ce qu'on lui demande de savoir. Ces dévolutions d'objets d'études, d'objets de savoir et d'objets d'enseignement devraient pouvoir s'interpréter comme des dévolutions de situations didactiques d'un autre type.

3.4. L'épistémologie des professeurs

Le professeur est alors conduit à expliciter auprès de l'élève une méthode de production de la réponse : comment *répondre* à l'aide des connaissances antérieures, comment *comprendre*, *construire* une connaissance nouvelle, comment « *appliquer* » les leçons antérieures, *reconnaître* les questions, comment apprendre, deviner, résoudre..., etc. Il se réfère ainsi à un fonctionnement implicite des mathématiques ou à un modèle (comme la géométrie élémentaire) construit pour l'usage qui en est fait : résoudre les conflits du contrat didactique.

Cette « épistémologie du professeur » (à usage professionnel) doit aussi être en fait celle de l'élève et de ses parents. Elle doit être présente dans la culture pour permettre aux justifications de fonctionner et d'être reçues. Le professeur n'est pas libre de la changer à sa guise. On comprend qu'elle a peu de chance d'être consistante, donc de servir de base à une théorie didactique.

Pour les enseigner, un professeur doit donc réorganiser les connaissances afin qu'elles se prêtent à cette description, à cette « épistémologie ». C'est le début du processus de *modification* des connaissances qui en change l'organisation, l'importance relative, la présentation, la genèse... en fonction des nécessités du contrat didactique. Nous avons appelé *transposition didactique* cette transformation.

Remarquons qu'a priori, la pratique empirique de l'enseignement des mathématiques, quelle que soit la qualité scientifique des professeurs, ne le conduit pas spontanément à construire une simulation correcte de la genèse des notions. Au contraire, la tentation est grande d'économiser le double travail (de recontextualisation et de redécontextualisation) et de faire apprendre directement un texte du savoir : pour respecter les autres obligations du contrat, des problèmes sont bien proposés aux élèves mais leur solution peut être trouvée par des procédés qui font l'économie de la connaissance spécifique de la notion (comme dans l'exemple de l'analogie). La solution est cachée sous une fiction didactique connue de l'élève et qui sert au moment de la négociation. Puisque le maître doit

Cinquième étape : Dévolution de la situation adidactique

Pour réussir le jeu des lapins, l'élève doit bien effectuer l'énumération d'une collection. Mais il ne suffit pas qu'il la produise une fois « par hasard ». Il faut qu'il sache la reproduire à volonté dans des circonstances variées. Il faut qu'il soit conscient de ce pouvoir de reproduction et qu'il ait une connaissance, au moins intuitive, des conditions qui lui permettent de bonnes chances de réussite. L'élève doit reconnaître les jeux auxquels il vient d'apprendre à jouer. Mais ce qu'il sait faire ne lui a pas été nommé, identifié et surtout ne lui a pas été décrit comme une procédure « fixe ». Ainsi, la dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement mais sur les situations qui le caractérisent. Cet exemple a été choisi pour bien distinguer les différentes composantes de la dévolution. L'énumération n'est pas un concept mathématique culturellement très pesant. Il n'intervient dans l'enseignement que beaucoup plus tard, avec des langages et problématiques différents. Ni le vocabulaire, ni la connaissances formelles ne viennent donc perturber l'objet de l'enseignement.

L'enfant, avant cet apprentissage, avait pu « énumérer » des collections en déplaçant les objets ou en les marquant de façon à toujours avoir une matérialisation commode de l'ensemble restant à énumérer.

Mais ici, il doit effectuer la même tâche mentalement, ses représentations doivent s'étendre à un contrôle intellectuel beaucoup plus complexe : chercher un premier lapin facile à repérer, puis un autre, de telle façon à garder à l'esprit que ces deux sont déjà pris ; chercher un autre, assez voisin des premiers et formant avec eux une disposition (petite groupe, ligne...) permettant de ne pas les perdre « de vue » tout en cherchant un quatrième, qui entre à son tour dans la structure afin de ne pas reprendre un lapin déjà pris et de permettre de savoir s'il en reste encore..., etc.

Cette « tâche » ne peut pas être décrite comme une procédure, ni même « montrée » car énumérer une collection *devant* un enfant ne lui donne aucune idée des moyens de contrôle qu'il doit acquérir.

Dans cet exemple, la dévolution de la situation adidactique peut être observée indépendamment de la dévolution de l'objet d'enseignement (qui ne peut avoir lieu à ce moment). Ni le maître ni l'élève ne peuvent identifier, sinon par la réussite d'une tâche complexe, ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir.

Un peu plus tard, les énumérations, en tant que productions peuvent devenir des objets d'étude pour l'élève. Il peut reconnaître celles qui sont semblables ou différentes, celles qui sont correctes ou celles qui échouent... concevoir et comparer des méthodes... et

« prouver » à l'élève qu'il lui était possible de répondre et d'apprendre le savoir visé, il doit au moins pouvoir lui dire comment « a priori ». Certes, si la solution est articulée comme un texte mathématique, elle comprend la justification scientifique correcte du résultat mais beaucoup d'élèves obtiennent « la réponse non par le raisonnement mathématique souhaité », mais par le décodage de la convention didactique.

3.5. Illustration : l'effet « Diénès »

L'étude des conceptions de Diénès¹⁵ et des échos qu'elles ont éveillés chez les enseignants dans le cadre des réformes des années soixante-dix est à ce sujet extrêmement démonstrative (Maudet 1982).

Par son « processus psychodynamique » Diénès propose un modèle d'apprentissage fondé sur la reconnaissance des similitudes entre des « jeux structurés » puis sur la schématisation et la formalisation de ces « généralisations » guidées.

Il s'agit en fait d'une description déjà en usage, comme la répétition de problèmes ou d'exemples semblables pour induire une réponse type. Mais elle s'accompagne d'une traduction en termes mathématiques : des problèmes semblables deviennent « isomorphes » et une généralisation un « passage au quotient ». La théorie ensembliste et les structures fondamentales deviennent le moyen de décrire tous les éléments de la situation d'enseignement qui, en retour, les illustrent parfaitement.

Cette traduction implique une confusion systématique entre la structure de la situation (le jeu), la structure de la tâche, le processus intellectuel et la connaissance elle-même (en tant que structure mathématique). Elle conduit donc implicitement à ériger les fondements des mathématiques, tels qu'ils étaient conçus à l'époque, en un modèle universel, aussi bien comme moyen de description et d'organisation des mathématiques (la logique), moyen de leur construction et de leur fonctionnement (épistémologique), moyen d'expliquer le fonctionnement psychologique de l'élève à leur sujet (psychologie cognitive), moyen de décrire le processus d'apprentissage et les étapes du développement d'une connaissance (épistémologie génétique) et enfin les moyens didactiques d'obtenir cet apprentissage.

L'épistémologie spontanée des professeurs se trouvait ainsi soudain justifiée ; « sacralisée » par sa reformulation en termes « scientifiques » et réaccordée miraculeusement avec tous les domai-

15. NdE : Diénès (1970).

nes susceptibles de la contester. Ce fait fut une des causes du succès initial des propositions de Diénès.

Un telle didactique est indépendante des contenus. Elle conduit même le professeur à mettre l'accent sur les variables non pertinentes de la situation mathématique (celles qui ne les modifient pas) au détriment des conditions spécifiques (« principe de variabilité »). Et finalement, elle n'est qu'une méthode de présentation de savoirs favorisant leur mémorisation.

Le fait le plus évident dans l'utilisation de cette méthode est le suivant : seuls les prosélytes de la méthode sont susceptibles de la faire fonctionner avec succès. Tout usage « servile » des matériels Diénès conduit à des déceptions et à des échecs.

L'analyse en terme de contrat didactique peut proposer une explication à ce fait.

La méthode didactique de Diénès, en s'appuyant sur « le processus psychodynamique », ne laisse pas explicitement d'autre place à l'enseignant que le choix des matériels, la présentation des fiches, les encouragements d'usage... La méthode doit opérer par la vertu d'un processus interne du sujet, *inéluctable* dès lors que ses conditions d'entrées sont satisfaites : présentation répétée de jeux structurés, demande de schématisation..., etc. Elle délivre ainsi le maître de la responsabilité technique d'obtenir lui-même l'apprentissage espéré. Il peut présenter ses exercices, attendre... fournir éventuellement les réponses accompagnées d'une petite explication, envoyer à la fiche suivante, organiser le jeu correspondant... mais le contrat d'enseignement ne le lie plus à l'évolution du comportement cognitif que le « jeu » est supposé prendre en charge. Au contraire, il doit laisser l'élève penser par lui-même. Or, les jeux de Diénès ne sont pas très souvent satisfaisants parce qu'ils postulent que les règles proposées à l'élève (pour jouer) sont les mêmes que celles qu'il faut lui apprendre, la structure du jeu et celle qui « est » le savoir sont identiques ! Ainsi la compréhension de la règle, condition pour agir, exige préalablement, de la part de l'élève, la connaissance que l'on prétend lui enseigner. Si le maître enseignait d'abord la règle, le jeu se transformerait donc en exercice. Pour éviter cela, il essaie de faire deviner la règle – activité qui n'est pas théorisée dans le processus psychomathématique.

Mais l'insuffisance théorique et pratique des jeux de Diénès n'explique pas seule que les échecs soient observés moins fréquemment chez les prosélytes de la méthode que chez les utilisateurs consciencieux mais non engagés. Un professeur qui fait confiance au processus psychodynamique se contente de proposer à l'élève les fiches et les jeux et attend que l'effet annoncé, la généralisation ou la

bonne formalisation, se produise. Elle se produit mal à cause de la rupture de la négociation liée à la baisse de pression du maître.

Le contrat d'enseignement peut subsister si le maître se soucie des résultats quantitatifs de l'élève mais l'articulation des connaissances et leur genèse restent ignorées. Au contraire, l'action « militante » d'un professeur décidé à montrer que la méthode est efficace le conduit à restaurer ce débat. L'insuffisance des situations didactiques proposées, en ce qui concerne la justification et la signification des connaissances visées, n'empêche pas le discours du maître de leur donner un sens et une place suffisante pour un apprentissage mais elle provoque dans certains cas l'échec au niveau du contrat.

Il est exact toutefois que si les situations étaient mathématiquement incorrectes, aucune dévolution ne permettrait aux jeux de Dièzes de produire la connaissance annoncée. Le problème reste ouvert pour de « bonnes » situations. Dans tous les cas, les méthodes d'enseignement de Dièzes permettraient d'obtenir des résultats, mais pour des raisons différentes de celles avancées dans la théorie qui les accompagnait.

Cette analyse montre l'utilisation qui peut être faite de la notion de contrat pour tenter d'expliquer un phénomène de didactique lié à l'épistémologie des professeurs. Problème important : est-ce que toute méthode ou toute situation réputée efficace par le truchement d'une quelconque « loi psychologique » ou « didactique » qui délièverait le professeur de la négociation didactique n'entraînerait pas le même effet ?

Plus le professeur serait assuré de la réussite par des effets indépendants de son investissement personnel et plus il échouerait... ! Nous appelons *effet Dièzes* ce phénomène qui montre la nécessité d'intégrer les rapports maître-élève dans toute théorie didactique. Et cette conclusion renvoie à une question plus difficile : l'épistémologie des professeurs est-elle incontournable ?

3.6. Heuristique et didactique

Il est clair qu'on ne connaît pas les conditions à la fois nécessaires, minimales, pour donner le maximum de sens à l'activité de l'élève, et néanmoins suffisantes pour lui permettre de satisfaire son contrat. On ne connaît pas d'épistémologie génétique effective qui permette l'économie de ces négociations de sorte que le maître et l'élève sont souvent réduits (inconsciemment bien sûr) à des expédients :

- la substitution de problème qui peut aboutir à l'effet Topaze ou plus froidement à l'effet Jourdain,
- l'usage abusif de l'analogie, le glissement métacognitif, etc.

Or, le professeur, à côté des problèmes, doit donner des moyens de les résoudre (le savoir théorique par exemple) et rendre compte que les moyens déjà enseignés, permettraient bien de construire la solution. Il doit donc faire comme s'il savait comment, en partant de certains savoirs (enseignés) on fabrique des solutions à des problèmes nouveaux. Et un jour, il doit aussi s'expliquer sur ces moyens : comment on les retrouve, comment on les reconnaît...

Son action présuppose-t-elle une épistémologie ? Il va être obligé de la produire, de la livrer ! Pourquoi l'élève a-t-il fait une erreur ? Comment peut-il éviter les prochaines ? Comment trouver une solution ?

« L'algorithme » constitue un instrument de déblocage et de solution des conflits didactiques, en ce sens qu'il permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et « l'applique » correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle. On lui affirme qu'il existe toute une classe de situations *différentes* dans lesquelles l'algorithme donne une solution (le conflit va reprendre quand il s'agira de choisir un algorithme pour un problème donné).

L'algorithme est pratiquement le seul moyen « officiel » de déblocage ; c'est-à-dire qu'il a fait l'objet de l'explicitation des méthodes d'enseignement qui le concernent. Et il sert de modèle unique ou presque à toutes les approches culturelles de l'enseignement.

On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode : comme des moyens « efficaces » de résoudre les problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur les choisit de façon à ce qu'elles relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident *sans* toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes ou aux théorèmes de mathématiques pour l'autre.

Avec cet Art de résoudre des problèmes, dont l'essentiel est fondé sur l'introspection, le maître voudrait apprendre à son élève à chercher ; lui, attend des algorithmes.

Or, ce que le maître voudrait présenter à l'élève comme des occasions de recherches typiques n'est qu'une collection d'objets culturels, de problèmes dont les solutions sont connues et répertoriées par l'heuristique. L'élève est donc fondé à la recevoir sur le mode du savoir. En ce sens, comme Glaeser (1984-1985 p.151) le souligne fortement, « l'heuristique ne peut pas s'enseigner puisque sa matière est la part imprévisible et créative de toute recherche de problème. On

ne peut que donner un entraînement à l'heuristique qui habitue l'étudiant aux situations de recherches ».

Mais alors le processus reste bloqué ! le professeur ne devrait pas, par exemple, inviter l'élève à faire usage des démarches de pensées inventoriées par Polya (1957) et qu'il a lui-même reconnu avoir utilisées lors de ses succès de mathématicien.

Il n'y a pas grand danger pourtant à *délivrer* à l'occasion des informations ! ou des conseils... « Dessinez une figure, introduisez la notation appropriée, quelle est l'inconnue ? Connaissez-vous un problème qui se rattache à celui-ci ? ... Énoncez le différemment... Reportez-vous aux définitions... » (Polya, commentaires). Au contraire, il s'agit d'habitudes à acquérir.

« Pour résoudre un problème vous devez successivement : comprendre le problème... » (Polya 1957). Le contrat glisse ; maintenant, la recherche des informations ou des suggestions latérales devient un moyen didactique *reconnu*, bientôt peut-être exigible d'un élève qui prétend chercher et dont on met en doute l'activité réelle.

Alors le maître est appelé en retour à mettre au clair ces moyens, à les classer, à les identifier, à les définir, à répondre de leur efficacité. Il va donc peut-être choisir les problèmes qui permettront le mieux de les illustrer, de les appliquer, de les faire fonctionner, à titre d'exemple. Mais il ne peut pas restreindre les problèmes de mathématiques à ceux où l'application presque automatique d'un procédé annoncé à l'avance donne la solution. L'élève cherche alors quelle suggestion procédologique est la bonne. La boucle est accomplie, les « heuristiques » se sont substituées ou ont pris place à côté des théorèmes et des théories parmi les moyens entre lesquels il faut choisir pour résoudre un problème mais le problème reste et le contrat didactique aussi.

Pourquoi alors ne pas chercher des heuristiques du second ordre ? (!)

Cette voie amorce un type de glissement (heuristique) récurrent comparable au *glissement métacognitif*. Il est possible d'identifier aussi un *glissement métamathématique* qui consiste à substituer à un problème mathématique un débat sur la logique de sa solution et à lui attribuer toutes les sources d'erreurs.

Le processus que nous venons de décrire est donc une tendance résultant naturellement des nécessités du contrat didactique. Il est facile d'en trouver des exemples à plusieurs reprises dans l'histoire de l'enseignement. De même, il est clair qu'il n'a rien d'inéluctable : les réticences, puis les résistances, se font de plus en plus fortes au fur et à mesure que le glissement devient important. Il semble que, comme pour l'effet de glissement métacognitif, la seule force antagoniste soit la vigilance épistémologique.

Comme pour les analogies, l'usage – naïf ou systématique – des heuristiques est un excellent moyen de recherche des solutions de problèmes (l'heuristique étant le moyen par définition et par excellence) à condition d'être mis en œuvre sous la responsabilité exclusive de son utilisateur. Tout crédit accordé a priori à une méthode particulière est une source de déceptions souvent amères, qui la rend impropre au contrat didactique. Avec Gleaser (1984-1985), nous pouvons appeler « procédologie » « tout le répertoire de recettes éprouvées » (sur les stocks de problèmes classiques) que l'enseignement... inculque » (ibid. p.151) et qui ne sont pas des théorèmes ou des métathéorèmes. L'enseignement ne semble pas avoir pour mission explicite d'inculquer ces recettes, et nous préférons admettre qu'il le fait sous la pression du contrat didactique.

Par contre, je proposerai d'étendre le terme de « *procédures algorithmiques* » « qui paraissent... comme sous-programme d'une recherche heuristique » (ibid.) à tout ce qui, dans le contrat didactique, tend à jouer le même rôle, y compris les heuristiques ou les idées originales, lorsqu'elles sont présentées ou utilisées comme des recettes.

C'est la fonction et la présentation didactiques qui laissent ou enlèvent sa valeur à un procédé. Plus exactement, c'est la nature du contrat qui se noue à leur propos. Comme l'effet Diénès (pour le maître), l'affirmation à l'élève qu'il existe une méthode automatique (ou presque) pour établir une famille de résultats, même si *c'est vrai*, tend à le décharger de la responsabilité fondamentale du contrôle de son travail intellectuel, bloque donc la dévolution du problème, ce qui fait échouer le plus souvent l'activité (et de plus, permet à l'élève de contredire et contester la méthode s'il le veut).

Il me paraît nécessaire de souligner ce que nous venons de montrer :

– qu'il n'y a pas de différence de nature entre un usage réservé et légitime de « l'heuristique normative » de Polya, en vue de « l'éducation » mathématique et une fine procédologie du second ordre ; seulement une différence de degré dans l'acceptation du glissement sous la pression du contrat (ou pour aller vers l'élève) ;

– il n'y a pas de raison de déclarer a priori illégitime, pour le maître, de donner des indications de cette nature (comme ce que nous avons appelé « l'épistémologie des professeurs »), on peut considérer qu'elles sont, en l'absence d'une authentique science de la didactique, une nécessité professionnelle inévitable.

Il est plus important de comprendre les conditions antagonistes qui influencent l'équilibre entre les tendances opposées (pas de renseignements – trop de renseignements).

Cette analyse soulève l'hypothèse suivante : l'heuristique pourrait n'être qu'une rationalisation fondée sur l'épistémologie des professeurs, une invention didactique pour les besoins du contrat, récupérée et développée par les mathématiciens en guise d'épistémologie spontanée.

4. COHÉRENCE ET INCOHÉRENCES DE LA MODÉLISATION ENVISAGÉE : LES PARADOXES DU CONTRAT DIDACTIQUE

Envisager l'enseignement comme la dévolution, par le professeur à l'élève, d'une situation d'apprentissage a permis de repérer certains phénomènes. La tentative de modéliser cette dévolution comme la négociation d'un contrat permet de les expliquer en grande partie et d'en prévoir d'autres.

L'aboutissement de cette démarche fera considérer le maître comme un joueur face à un système lui-même formé d'un couple de systèmes : l'élève et, disons pour l'instant, un « milieu » dénué d'intentions didactiques à son égard.

Dans le « jeu » de l'élève avec le milieu, les connaissances sont les moyens d'appréhender les règles et les stratégies de base, puis des moyens d'élaborer des stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat cherché.

Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu le contrat didactique est le moyen d'établir les règles et stratégies de base puis de les adapter aux changements de jeux de l'élève.

A chaque connaissance, et peut-être à chaque fonction d'une connaissance, doivent correspondre des situations (des problèmes) spécifiques et probablement des contrats didactiques. L'évolution des joueurs et du jeu – à l'encontre des jeux à règles fixes – conduit à des remises en cause des connaissances et du contrat didactique.

Cette didactique est à la base même de la constitution des savoirs en tant qu'ils articulent le spécifique et le général. Avant d'approfondir et de systématiser cette modélisation, il est utile d'explorer sa *cohérence*. Cette étude permettra aussi de *préciser* les fonctions ou les relations qu'il convient de représenter (par des règles) et les difficultés de l'entreprise.

Ce paragraphe permettra d'exposer plus clairement la méthodologie de la didactique. Envisager l'enseignement comme la dévolution à l'élève de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir, conduit à des paradoxes qu'il est utile de signaler.

4.1. Le paradoxe de la dévolution des situations

L'enseignant doit obtenir que l'élève résolve les problèmes qu'il lui propose afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche.

Mais si l'élève produit sa réponse sans avoir eu à faire lui-même les choix qui caractérisent le savoir convenable et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice devient trompeur. Ceci se produit en particulier dans le cas où le professeur a été conduit à dire à l'élève *comment* résoudre le problème posé ou quelle réponse donner ; l'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions, n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion. Le professeur a l'obligation sociale d'*enseigner* tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève – surtout lorsqu'il est en échec – le lui demande.

Ainsi donc, plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève *ce* que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité.

C'est le premier paradoxe : ce n'est pas tout à fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque.

Ce contrat didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. Nous verrons plus loin de quelle manière.

4.2. Les paradoxes de l'adaptation des situations

Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées (dévolues).

Nous admettons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct.

Dans certains cas, il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu. Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances.

Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux ou inadéquat.

L'enseignant se trouve alors devant de nouveaux paradoxes :

4.2.1. *Inadaptation à l'exactitude*

Même si ce savoir enseigné au cours d'une première étape est nécessaire pour aborder une étape ultérieure, l'enseignant doit s'attendre à se voir reprocher les erreurs ainsi tolérées ou suscitées. Les reproches viendront aussi bien de ses élèves que des professeurs des niveaux supérieurs, à moins qu'une tradition ou qu'une négociation culturelle ne le disculpent.

Dans l'hypothèse envisagée, il existe une alternative : le professeur renonce à l'enseignement par adaptation, il enseigne directement un savoir conforme aux exigences scientifiques. Mais alors cette hypothèse implique qu'il doit renoncer à donner un sens à ce savoir et à l'obtenir comme réponse à des situations d'adaptation parce qu'alors les élèves le coloreront de significations fausses.

Le professeur a le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier.

Les choix intermédiaires pourront conjuguer les deux inconvénients et même les compliquer.

L'élève à qui l'on enseigne, d'une part, un savoir « savant » et à qui l'on présente, d'autre part, des situations de référence inadéquates est à même de constater toutes sortes de contradictions et d'inadaptations entre ces deux objets d'enseignement. Les savoirs qu'il obtient en comprenant sont même faux ou différents de ceux qu'on prétend lui enseigner.

Les distinctions que l'on établit entre savoir théorique et savoir pratique ne sont souvent peut-être qu'une simple conséquence et une récupération de cette difficulté purement didactique. Ici encore,

l'élève est devant une injonction paradoxale ; il doit comprendre ET apprendre ; mais pour apprendre il doit, dans une certaine mesure, renoncer à comprendre et pour comprendre, il doit prendre le risque de ne pas apprendre. Prendre comme objet d'enseignement le savoir et sa genèse (vraie ou fictive), et donc enseigner le savoir *et* son sens n'est pas une solution parfaite non plus.

4.2.2. *Inadaptation à son adaptation ultérieure*

La mémorisation de savoirs formels, largement dépouillés de sens, peut être très coûteuse en exercices d'apprentissages. Ces derniers ne doivent pas réintroduire trop de sens, ce qui augmente encore leur difficulté. La représentation que se fait l'élève du savoir mathématique et de son fonctionnement s'en trouve profondément perturbée. Plus l'élève a été entraîné aux exercices formels, plus il lui est difficile, plus tard, de restaurer un fonctionnement fécond des concepts ainsi reçus. « L'application » d'un savoir appris tout fait se produit mal parce que la logique de l'articulation des acquisitions qui le composent est uniquement celle du savoir lui-même et que le rôle des situations a été exclu a priori.

Examinons le choix inverse, celui d'une compréhension, provisoirement erronée, d'un savoir obtenu par adaptation à des problèmes « introductifs ». Il faudra reprendre et modifier ce savoir.

Un nouveau paradoxe apparaît : si les élèves se sont *bien* adaptés aux situations qui leur sont proposées, ils ont mieux compris les raisons de leurs réponses et les rapports de leur savoir avec les problèmes, il sera donc plus difficile, par la suite, de changer ce savoir pour le rendre correct et pour le compléter.

Nous venons de montrer que pour certaines connaissances, il est assez prévisible que le savoir sera d'autant plus difficile à « reprendre » et à modifier qu'il aura été mieux appris, mieux compris et mieux confirmé dans la première étape.

Ce fait tient sans doute à des raisons d'ordre psychologique : il est d'autant plus difficile de changer ses habitudes ou ses opinions, qu'elles sont plus intimement liées à des activités plus personnelles plus nombreuses et plus anciennes.

Mais il pourrait tenir aussi à une raison plus directement épistémologique. La suradaptation du « savoir » à la solution d'une situation particulière n'est pas nécessairement un facteur favorable à la solution d'une situation nouvelle. Une différenciation trop forte, une dépendance trop grande par rapport aux « connaissances » directes et l'évolution devient impossible. Le savoir premier fait obstacle. Certains de ces obstacles sont inévitables et constitutifs du savoir – d'autres sont le résultat d'un surinvestissement didactique.

Ainsi, dans l'hypothèse d'un savoir inaccessible à tout élève par une adaptation assez courte à une situation fondamentale assez correcte, le professeur se trouve devant un nouveau paradoxe.

Qu'il choisisse un enseignement formel ou par adaptation, plus il insiste sur l'apprentissage des connaissances intermédiaires, plus il risque de contrarier les enseignements ultérieurs.

Inversement, s'il renonce à fixer, à institutionnaliser les acquisitions, même partielles, l'élève ne trouvera aucun appui lors des étapes suivantes. Dans certains cas, mieux l'élève s'adapte à une situation didactique intermédiaire, plus il est inadapté à l'étape suivante.

4.3. Les paradoxes de l'apprentissage par adaptation

4.3.1. *Négation du savoir*

L'hypothèse que l'élève pourrait construire son savoir par une adaptation personnelle adidactique est-elle constante ?

Imaginons en effet que le professeur fasse dévolution à l'élève d'une source de questions auto-contrôlables¹⁶ ou d'un problème. Si l'élève résout ce problème, il peut penser qu'il l'a fait par l'exercice normal de ses connaissances antérieures. Le fait d'avoir résolu le problème lui apparaîtra comme la preuve qu'il n'y avait rien de nouveau à apprendre pour cela. Même s'il est conscient d'avoir remplacé une stratégie ancienne et culturellement identifiée par une autre de son « invention », il lui sera bien difficile de déclarer que cette « innovation » est un savoir nouveau : quel besoin de l'identifier comme une méthode puisqu'elle semble pouvoir être produite facilement lorsque c'est nécessaire ? Comment un sujet seul pourrait distinguer dans toutes les décisions qu'il a prises celles qui sont déductibles de la situation et qui pourraient servir telles quelles dans d'autres situations, de celles qui sont purement conjoncturelles et locales.

Les conditions sociales d'un apprentissage par adaptation, en rejetant le principe de l'intervention des connaissances d'un tiers pour produire la réponse, tend à rendre impossible l'identification de cette réponse comme une nouveauté, donc comme correspondant à une acquisition de connaissances.

Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée

16. C'est-à-dire telles que l'élève ne sait pas a priori y répondre, mais le pourra lorsqu'il aura une solution et qu'il saura si elle est exacte sans recourir au maître.

avant lui, ou si personne n'a su y répondre, ou encore si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées par le fait qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci..., etc. Il faut donc que quelque'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette *institutionnalisation* est en fait une transformation complète de la situation. Choisir certaines questions parmi celles que l'on sait résoudre, les placer au cœur d'une problématique qui confère aux réponses que ces questions appellent un statut de savoir plus ou moins important, les relier à d'autres questions et à d'autres savoirs, constitue finalement l'essentiel de l'activité scientifique. Ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait devoir être laissé à la charge de l'élève et il revient à l'enseignant. Il n'est donc pas le résultat d'une adaptation de l'élève.

D'une certaine façon, l'adaptation contredit l'idée de la création d'un savoir nouveau. Inversement, le savoir est presque la reconnaissance culturelle que la connaissance directe est impuissante à résoudre naturellement certaines situations (paradaptation).

4.3.2. *Destruction de la cause*

Les situations permettant l'adaptation de l'élève sont le plus souvent par nature répétitives : l'élève doit pouvoir faire plusieurs tentatives, investir la situation à l'aide de ses représentations, tirer des conséquences de ses échecs ou de ses succès plus ou moins fortuits...

L'incertitude dans laquelle il est plongé est à la fois source d'angoisse et de plaisir. La réduction de cette incertitude est le but de l'activité intellectuelle et son moteur. Mais connaître la *solution* à l'avance, c'est-à-dire avoir transformé des réponses satisfaisantes, mais locales, en méthode dominant la réponse dans tous les cas, détruit le caractère incertain de la situation qui se trouve alors vidée de son intérêt. Ainsi la connaissance prive l'élève du plaisir de chercher et de trouver une solution « locale ». L'adaptation – par la connaissance – coïncide donc avec le renoncement à une incertitude somme toute agréable. L'adaptation de l'élève tend à détruire la motivation qui la produit comme elle tend à enlever tout sens à la situation qui la provoque.

Elle devrait donc s'arrêter très vite et, à la limite, ne pas se produire dès lors qu'un processus devient nécessaire.

L'image simple d'une adaptation à des perturbations extérieures n'est pas satisfaisante pour représenter le phénomène d'apprentissage. Elle ne laisse pas de place à deux éléments essentiels pour le maintien du processus :

- d'une part, la création d'une motivation intrinsèque qui relance l'élève dans la recherche d'une autre « occasion » de s'adapter sans la tentative d'adapter le milieu à lui-même,
- d'autre part, l'adaptation interne du sujet sans perturbations extérieures et sans « activité » réelle (comme par exemple la résolution des contradictions internes du sujet nées de l'assimilation de schèmes nouveaux dont parle Piaget).

4.4. Le paradoxe sur le comédien

Le professeur peut-il échapper à la dévolution, à l'intention directe d'enseigner tel savoir particulier ? Peut-il échapper à la situation didactique. Après tout, il lui suffirait peut-être d'être mathématicien et de se comporter comme tel devant et avec l'élève. La participation progressive de ce dernier à cette activité pourrait lui permettre d'apprendre les mathématiques comme une activité culturelle directe, sans décalage de langage ou de méthode, sans transposition non plus. L'élève apprendrait les mathématiques comme il a appris sa langue maternelle. Le milieu culturel peut-il être « naturellement » enseignant sans être localement didactique ? Le système didactique peut-il être envisagé sans enseignant ?

Certes, de nombreux travaux ont montré le rôle important joué par le milieu familial social et culturel dans les différences de comportements et de réussite scolaire.

Il est vraisemblable que l'enfant peut apprendre beaucoup de choses dans la mesure où l'activité mathématique des membres de la famille se traduit par des débats et par des questions qui peuvent lui être accessibles ; il en retiendra notamment des méthodes, des exigences, des habitudes et un repérage des difficultés ; c'est-à-dire des renseignements de nature épistémologique. Mais lorsqu'un projet d'apprentissage personnel d'un savoir déterminé se dessinera, l'enfant redeviendra l'élève et le système fondamental réapparaîtra : l'un sera l'enseignant, l'autre l'enseigné et qu'il soit spontané ou institutionnel, le maître ne peut pas échapper à la dévolution du savoir.

Ce savoir dont le texte existe déjà n'est plus une production directe du maître, c'est un objet culturel, cité ou récit. Et sa reproduction au moment voulu est donc beaucoup plus comparable à une pièce de théâtre rejouée à l'intention de l'élève, puis par l'élève lui-même, qu'à une aventure vécue avec lui-même. Si l'élève peut vivre son apprentissage, le maître, lui, est nécessairement un acteur, dès lors qu'il sait à l'avance ce qu'il veut enseigner. Il ne s'agit pas d'une métaphore : l'enseignant est réellement un acteur — avec ou

sans texte — occupé à faire vivre une reproduction du savoir à son élève.

Cette approche répond en partie à la question initiale, mais elle la transforme et la fragmente :

- i) Le maître doit-il « faire » les mathématiques qu'il veut enseigner, au sens où l'acteur devrait éprouver les sentiments qu'il veut faire partager au spectateur ?
- ii) Le maître doit-il refaire chaque fois son texte autour d'un canevase comme dans la *comedia del arte*, ou doit-il s'en tenir à un « texte » bien éprouvé ?

Sur le dernier point, Diderot a formulé dans une étude célèbre le paradoxe inhérent à l'activité du comédien :

Plus l'acteur éprouve les émotions qu'il veut présenter, moins il est capable de les faire éprouver au spectateur car « observateur continu des effets qu'il produit, l'acteur devient en quelque sorte spectateur des spectateurs en même temps qu'il l'est de lui-même et peut ainsi perfectionner son jeu »¹⁷.

Ce paradoxe se prolonge au cas du professeur. S'il produit lui-même ses questions et ses réponses de mathématiques, il prive l'élève de la possibilité d'agir. Il doit donc laisser du temps, laisser des questions sans réponses, utiliser celles que l'élève lui donne et les intégrer dans sa propre démarche en leur laissant une place de plus en plus grande... Ce schéma idyllique peut se dérouler tant que le professeur fabrique un savoir nouveau mais si le savoir est déterminé à l'avance, cette « liberté », n'est plus qu'un jeu d'acteur et l'élève est convié à être un autre acteur, astreint à un texte ou tout au moins à un canevase, qu'il est censé ignorer. Certains schémas pédagogiques postulent la nécessité que le maître ignore lui-même le savoir. L'existence de ces schémas est la preuve de la pertinence de notre analyse. Il est aisé de montrer leur caractère illusoire (ce qui ne veut pas dire que toutes les entreprises de ce type échouent, mais qu'elles ne réussissent que sous d'autres conditions).

Ainsi que le montre notre étude¹⁸, le paradoxe de Diderot s'applique au professeur de façon étendue et il est peut-être plus fondamental et plus aigu que pour le comédien. Entre autres, l'explication de la résistance des acteurs à cette analyse peut s'étendre à celles observées dans le monde des professeurs...

Le « paradoxe » au sens de Diderot est « une opposition absurde en apparence à cause qu'elle est contraire aux opinions reçues et qui

17. NdE : Diderot 1773 pp.186-187.

18. *The fragility of knowledge*, Brousseau et Otte 1991.

néanmoins est vraie au fond »¹⁹. Nous lui avons donné un sens plus étroit. Nos paradoxes sont des sortes de contradictions fonctionnelles entre un jeu, apparemment exhaustif, de décisions et leur finalité.

La résolution de ces paradoxes au même titre que l'explication des phénomènes observés, est l'un des buts d'une théorie des situations en même temps qu'un moyen de mettre à l'épreuve sa consistance.

5. MOYENS ET METHODES DE LA MODELISATION DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Il s'agit ici d'exposer l'instrument de la modélisation : le jeu, puis de discuter quels seront les rapports de ces « modèles » avec la réalité qu'ils décrivent.

Ces rapports ne sont pas ceux d'un original, qui serait le jeu fondamental comme modèle, avec sa copie, qui serait la réalité didactique, et où les difficultés seraient imputables aux écarts introduits par une « mauvaise » réponse des joueurs. Ces rapports, au contraire, laissent une place à la confrontation avec les observations et sont falsifiables. L'approche systémique ainsi proposée sera illustrée par une discussion des premiers sous-systèmes fondamentaux à prendre en considération. Nous montrerons que la nécessité d'introduire un système « milieu » dans le jeu didactique de l'élève n'est pas une réification du modèle (les instruments du jeu) ni le produit d'une observation mais celui d'une nécessité interne.

5.1. Situation fondamentale correspondant à une connaissance

Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre différents sous-systèmes : le système éducatif, le système élève, le milieu, etc. Il ne s'agit pas de décrire précisément ces sous-systèmes autrement que par les relations qu'ils entretiennent dans le jeu.

Avant de préciser le type de jeu qui sera utilisé, il faut identifier les deux grandes finalités de la modélisation :

5.1.1. Au regard de la connaissance

Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale :

- est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre ?
- pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle-là ?

- quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration ?
- quelle raison de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus accessible ou plus efficace que telle autre ?

Ce genre de questions peut être posé a priori. Dans un premier temps, les réponses peuvent être puisées dans la logique du jeu, dans l'histoire des sciences ou dans l'analyse mathématique, ou didactique : le jeu spécifique d'un savoir doit en justifier l'emploi ou l'apparition, conformément à la didactique théorique.

5.1.2. Au regard de l'activité d'enseignement

Le « jeu » doit permettre de représenter toutes les situations observées dans les classes - (sinon les déroulements particuliers) - même les moins « satisfaisantes » dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. Il doit pouvoir engendrer toutes les variantes, même les plus dégénérées. Elles seront obtenues par le choix des valeurs de certaines variables caractéristiques de ce jeu²⁰.

Les concepts généraux de la didactique devraient permettre d'établir la signification relative de ces différentes variantes, d'expliquer et de prévoir leurs effets, sur le type de connaissance qu'elles font acquérir, sur le déroulement des activités d'enseignement qu'elles discriminent et sur la qualité de leur résultat.

Inversement, ils devraient permettre d'assortir une connaissance des conditions qui la justifient, qui la rendent nécessaire, sous ses différentes formes.

Ajuster ces conditions en fonction de ce que nous savons de l'épistémologie, de la psychologie de l'enfant, de la linguistique, ou de la sociologie est un objectif raisonnable de la didactique.

Fournir un contrepoint expérimental aux réflexions des épistémologues ou des théoriciens de la connaissance est une ambition légitime. Mais il ne saurait être question de prétendre que toute activité de production de savoir est assimilable à un comportement « économique » dans un jeu explicitable. D'ailleurs, le savoir est toujours amplement surdéterminé. Il ne s'agit que de modèles, assumés comme tels.

20. Cf. « Ingénierie et didactique » dans Brousseau (1982a). NdE : voir aussi Artigue (1990).

19. Encyclopédie NdE : voir note 16.

5.2. La notion de jeu

Modéliser la notion vague de « situation » par celle de « jeu » exige une précision sur les sens accordés à ce mot. Ses cinq définitions principales ont toutes un rapport avec les éléments à présenter.

i) La première caractérise l'ensemble des relations, « l'hypothèse » à modéliser :

« Activité physique ou mentale, purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle-même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure ». [Défin. 1]

Cette définition met en scène essentiellement un *joueur* – capable d'éprouver du plaisir, de concevoir une fiction et d'établir des conventions et des *relations* avec un *milieu* non précisé. Il fournit une activité et son plaisir en dépend. Mais la définition insiste surtout sur le caractère quasi isolé du système ainsi évoqué. Pour le joueur – on admet qu'il puisse exister un « Deus ex machina » dont il ne doit pas avoir conscience. Pour lui donc, l'activité est gratuite. Mais comment concilier cette idée d'une action motivée par le plaisir et pourtant gratuite ? Est-ce que toutes les actions ne seraient pas finalement motivées par le plaisir ? Nous interpréterons la phrase dans le sens suivant :

Les décisions et les actions *au cours* du jeu ne sont réglées que par le plaisir que le joueur éprouve à les accomplir, en éprouve à leurs effets, mais la décision de se livrer au jeu lui-même n'est finalisée par aucun but. Nous reviendrons plus loin sur cette notion de gratuité.

A côté de ce premier sens, nous en trouvons quatre autres :

- ii) Le jeu est « l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte » (Lalande) [Défin. 2]. C'est le « game ».
- iii) C'est aussi, et nous utiliserons souvent le mot dans ce sens, « ce qui sert à jouer, les instruments du jeu », et éventuellement un des états du jeu déterminé par un assemblage particulier des instruments du jeu. [Défin. 3].
- iv) C'est parfois « la manière dont on joue », le « play ». Dans le cas où il s'agira de procédures, nous préférons les termes de « tactique » ou de stratégie. [Défin. 4].
- v) C'est enfin l'ensemble des positions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu (au sens 2) – et par extension, en mécanique par exemple, l'ensemble des positions possibles et donc les mouvements d'un système, d'un organe, d'un mécanisme que l'on a par ailleurs assujéti à respecter certaines contraintes. [Défin. 5].

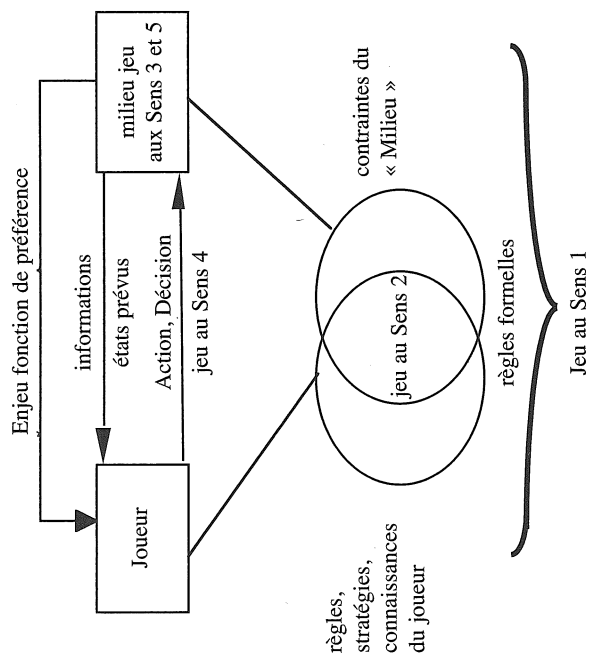


FIGURE 1

Les relations entre les différents sens apparaissent sur la figure 1. Rappelons que formellement, un « jeu » à k personnes (par exemple), est la structure définie par la donnée de :

- a) Un ensemble X de « positions » distinctes dans lesquelles peuvent se trouver les objets et les relations pertinentes.
- b) Une application Γ de $X \rightarrow P(X)$ qui, à tout état $x \in X$ fait correspondre l'ensemble $\Gamma(x)$ des positions permises entre lesquelles le joueur « au trait » peut choisir à partir de l'état x . Γ représente donc les règles.
- c) Un état initial I et un ou des états terminaux F (tels que $\Gamma^{-1}(I) = \emptyset$ et $\Gamma(F) = \emptyset$).
- d) Un ensemble J de k joueurs et une application Θ de $J \times X$ dans J qui, dans chaque état x de jeu, désigne le successeur au trait $\Theta(j, x)$ du joueur j .
- e) Une fonction dite de gain, d'enjeu ou de préférence et qui est une application de A , partie de X contenant F , dans R .

Cette définition n'est pas générale et l'on peut rencontrer des exemples de jeux qui réclament une modélisation différente, sensi-

blement plus complexe : par exemple, elle convient pour le jeu d'échecs ou les petits chevaux, pas pour les jeux de rôles.

Elle suffit néanmoins pour définir quelques termes de didactique.

- Une *partie* est une suite finie d'états (x_i) $1 \leq i \leq n$ de X telle que $X_1 = I$ et $\forall i, x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$. Les « états permis » sont les positions de X qui peuvent figurer dans une partie (aux échecs, les états non permis s'appellent parfois une *féerie*).

- Une *stratégie* S est une application de $X \rightarrow X$ qui détermine les choix d'un joueur dans tous les états permis $S(x) \in \Gamma(x)$, puisqu'il y a k joueurs, k stratégies suffisent à déterminer une partie.

- Une *tactique* T_A sera une application d'une partie A de X dans X et telle que $x \in A, T_A(x) \in \Gamma(x)$. Une stratégie est donc une tactique définie sur X tout entier.

- Un état de « connaissance » d'un joueur, C sera caractérisé par une application de X dans $\Gamma(X)$ telle que pour tout x ($C(x) \in \Gamma(x)$). Une « connaissance » (non vide) restreint strictement les choix des joueurs. (Cette définition est à rapprocher de celle de l'information).

- Une connaissance « déterminante » réduit à un seul état le choix du joueur dans un certain nombre d'états (resp. dans tous les états), et donc caractérise une tactique (resp. une stratégie).

Une acquisition de connaissances, par exemple sous l'effet d'une information reçue (ou d'un apprentissage), est une modification de l'état de connaissance : un couple (C, C') – en réalité C à l'instant t , C' à l'instant $t + \Delta t$.

Le plus souvent, suivant en cela la théorie de l'information on considère que $C'(X) \neq C(X)$, c'est-à-dire que la connaissance *réduit* l'incertitude du sujet en supprimant des possibilités de choix.

Mais il est nécessaire, pour modéliser les modifications de connaissances de l'élève, d'imaginer qu'il n'envisage pas à l'instant *toutes* les positions permises (bien qu'elles le soient par les règles, objectivement) et qu'une modification de son état de connaissance peut consister non pas à réduire son incertitude mais au contraire à l'augmenter par la considération à l'instant $t + \Delta t$ de possibilités nouvelles ouvertes à son choix. Cette considération écarte l'usage strict de la théorie de l'information.

*Modèle d'action*²¹ : Nous appellerons « modèle d'action » toute stratégie ou tout procédé de calcul engendrant une stratégie (ou une tactique).

21. J'ai utilisé ces définitions dans plusieurs cas et notamment dans l'étude des stratégies des mesurages avec H. Ratsimba-Rajohn (1981). On en trou-

De même, nous pourrions appeler représentation « ce » qui dans un jeu particulier, va engendrer les états de connaissance, ce qui va permettre de le prévoir.

Le premier avantage d'un modèle de ce genre est de permettre dans des cas précis, d'envisager a priori « toutes » les suites de réponses et de les comparer du point de vue de leur efficacité.

Une *stratégie gagnante* fournit contre toute défense une partie de gain positif, mais on peut évaluer diverses caractéristiques :

- son coût, par exemple le nombre de coups amenant la fin de la partie,

- le gain qu'elle procure...

Une *stratégie non gagnante* à tout coup pourra être néanmoins meilleure qu'une autre du point de vue des risques de pertes qu'elle entraîne, des gains qu'elle permet d'espérer, etc. La théorie des jeux permet alors d'étudier les dilemmes qui se présentent. La plupart des exercices d'apprentissage fondamentaux sont envisagés contre un partenaire qui est la « nature ».

La construction de modèles d'action permet d'aller beaucoup plus loin dans l'analyse de comportements possibles du sujet, comme nous le faisons dans plusieurs exemples (cf. la thèse de H. Ratsimba-Rajohn 1979). L'étude de l'adéquation d'une situation à une connaissance vise donc à montrer que la stratégie optimale peut être engendrée par cette connaissance et pas par une autre. Réciproquement, il devient alors possible de faire des hypothèses sur les variations de la situation et sur leur influence, sur les stratégies et sur les changements de stratégies (cf. la thèse de Bessot-Richard 1979).

Le sens d'une décision, d'un choix de l'élève peut être modélisé lui aussi, à l'aide de plusieurs composantes parmi lesquelles :

- a) l'ensemble des choix envisagés par l'élève et rejetés par un choix retenu.

- b) l'ensemble des stratégies possibles envisagées et exclues, en particulier la suite des choix ou des stratégies de remplacement envisagées par le sujet.

- c) les conditions même du jeu qui paraissent déterminantes pour le choix retenu, en particulier l'espace des situations engendrées par les valeurs des variables pertinentes qui conservent à la décision des caractères d'optimalité, ou de validité, ou de pertinence.

vera dans sa thèse une rédaction beaucoup plus détaillée avec plusieurs exemplaires intéressants, ainsi que dans la thèse de A. Bessot et F. Richard (1979).

5.3. Le jeu et la réalité

5.3.1. Ressemblance

Dans sa vie « réelle », le sujet organise ses actions selon ses intérêts, dans le cadre de règles inconnues et changeantes ; à l'opposé de ces activités sérieuses, professionnelles ou privées, se présentent les situations de jeu où il peut au contraire choisir ses règles, se livrer au plaisir, se libérer des autres contraintes.

Pourtant on connaît de nombreux exemples où la description précise du fonctionnement de certaines relations sociales, financières, économiques, militaires, etc., est éclairée et facilitée par sa transcription en termes de jeu ; la situation de jeu est souvent un bon modèle de situations réelles.

C'est pourquoi le jeu peut être un puissant dérivatif et un symbole de la vie : il lui ressemble ! En même temps, on peut se rendre maître des contraintes qui, dans la réalité, oppriment le joueur et cette liberté joue un rôle fondamental dans l'équilibration des frustrations qu'elles causent.

Examinons par exemple le jeu de la poupée rapporté par Freud. L'enfant fait disparaître la poupée sous un meuble « fort », puis à volonté la fait réapparaître « da »²². Certes, la reproduction du plaisir est liée au processus et il faut que la poupée disparaisse pour pouvoir réapparaître. Cependant, c'est le contrôle par l'enfant qui est la condition fondamentale. Une poupée « automatique » qui apparaîtrait à intervalles de temps réguliers ne jouerait pas le même rôle. Dès que l'enfant pourrait prévoir les réapparitions, le jeu cesserait de l'intéresser.

Une poupée qui ferait des apparitions aléatoires (qu'on ne peut ni commander ni prévoir) serait angoissante, trop « réaliste », c'est-à-dire trop près de la situation symbolisée de la mère. A moins qu'il ne découvre que la poupée réapparaîtra sûrement bientôt, qu'il la guette et qu'elle se montre effectivement pendant ce temps d'attente à un moment tout de même imprévu : dans ces conditions, il arrive que le bébé éclate de rire, surtout s'il découvre que quelqu'un commande la poupée avec malignité. Mais ce rire est une réaction de défense, à l'opposé du plaisir de la prise de contrôle des situations comme la dérision est opposée au pouvoir. Rires, mais rires de l'angoisse en passe d'être surmontée.

Le jeu est un symbole en ce sens qu'il ressemble « suffisamment » à la vie. Il sollicite du joueur le même genre de possibilité

22. *NdE* : en allemand dans le texte. Concernant le jeu « fort-da », voir plus particulièrement (Brousseau et Otte 1991 pp.32-35).

d'action, le même genre d'émotions, de motivations, et il s'en distingue parce qu'on y commande la plupart des conditions qui, dans la réalité, oppriment et échappent au joueur. La ressemblance est le moyen de donner un sens à la différence.

5.3.2. Dissemblance

On pourrait croire ainsi qu'on a justifié et expliqué la séparation fondamentale qui oppose le jeu à la vie, ou plus exactement le désir et la réalité, tout en permettant de les placer l'un par rapport à l'autre :

- le jeu conventionnel et symbolique jouant leur rôle à l'intérieur du jeu de la vie,
- le jeu symbole de la vie...

Mais si l'on suit Lacan²³, le symbole créé pour équilibrer les frustrations et les tensions nées des relations avec l'objet du désir, hérite en fait de leur caractère frustrant. Par exemple, lorsque la poupée apparaît quand on le veut et où on le veut, la prise de contrôle est achevée et le jeu disparaît en tant que tel. Ainsi, le jeu qui reste un jeu par définition ne satisfait pas le joueur et crée le besoin d'une nouvelle partie, d'un nouveau jeu ou d'un nouveau symbole. Lacan dit que les relations avec le symbole doivent donc être elles-mêmes équilibrées par la création d'un nouveau symbole ; ainsi la chaîne du sens est ouverte.

Le jeu doit être, soit contrôlé totalement et donc rejeté comme objet de désir, soit reproduit sans fin. Ces deux caractères sont très importants : un « jeu » où le joueur commanderait toutes les issues, tous les résultats, et gagnerait à coup sûr, n'offrirait aucune incertitude, et ne laisserait la place à aucune simulation des incertitudes de son « modèle ».

Si « un jeu compliqué n'est pas un jeu utilisable tel quel en classe, ... un jeu analysé est un jeu mort » (A. Deledicq)²⁴, le jeu ne peut pas être purement gratuit. Il est nécessaire qu'il y ait, face au joueur, un partenaire, un milieu, un loi de la nature qui s'oppose dans une certaine mesure à ce qu'il obtienne à tout coup le résultat voulu.

23. *NdE* : selon Guy Brousseau (communication personnelle) la contribution originale de Lacan sur ce problème classique est d'avoir montré que la question du sens est toujours ouverte, que tout symbole est impuissant à répondre aux questions qui sont à la source de son existence.

24. *NdE* : Brousseau se souvient ici d'un commentaire d'André Deledicq lors d'une conférence internationale à Saïgon en 1975.

5.4. Approche systémique des situations d'enseignement

L'approche systémique des situations d'enseignement paraît indiquée dans la mesure où les sous-systèmes en présence : l'enseignant, le système éducatif, sont identifiables immédiatement en tant qu'acteurs.

Elle présente de l'intérêt dans la mesure où la considération des sous-systèmes dégagés permet, soit de simplifier sensiblement l'étude des problèmes posés, soit d'isoler certains de ces problèmes qui peuvent être résolus dans ces sous-systèmes. Elle se révèle indispensable si la totalité des phénomènes didactiques peut être prise en charge de cette façon et peut alors prétendre à fournir un fondement théorique.

Mais elle présente une certaine ambiguïté et il y a danger qu'elle ne soit que l'instrument d'une projection sur la réalité du modèle pensé par le chercheur.

L'approche (systémique) classique des situations d'enseignement met l'accent sur ces systèmes concrets, en présence (le maître, l'élève) et leurs fonctions, leurs propriétés. Elle conduit à examiner, à l'aide du modèle de fonctionnement social, la manière dont ces fonctions sont assurées et intériorisées. Les difficultés observées seront alors imputées aux mauvaises réponses données aux besoins du système. Ce raisonnement constitue une réification, (Berger et Luckmann, 1966), c'est-à-dire que le schéma abstrait et la réalité « doivent » coïncider, et qu'il n'y a plus de place pour l'expérience et pour la falsification. Au contraire, la décomposition en sous-systèmes, envisagée ici, a pour objet la définition des *jeux* qui permettent de coordonner les stratégies opposées des partenaires en relation. Nous trouverons ainsi les jeux de l'élève avec son environnement didactique, relativement au savoir, les jeux du maître qui joue avec les jeux de l'élève... Il s'agit de postuler l'objet de l'étude didactique et de prouver son existence. La méthode apparaît, dès 1970, dans les travaux que nous regroupons ci-après²⁵, et s'améliore ensuite de façon empirique. Elle est très proche de celle préconisée par Crozier et Friedberg (1977) pour l'étude des systèmes sociaux et politiques :

« Si l'on peut... découvrir des stratégies suffisamment stables à l'intérieur d'un ensemble [de personnes] et si l'on peut, d'autre part, découvrir les jeux, les règles du jeu et les régularisations de ces jeux à partir desquelles ces stratégies peuvent être effective-

ment considérées comme rationnelles, on a à la fois, la preuve effective que cet ensemble peut être considéré comme un système et des réponses déjà précises sur son mode de gouvernement » (ibid. p.215).

Il serait encore naïf de croire que la construction de ces « systèmes d'action concrets » qui articulent les jeux des acteurs en présence, selon Crozier et Friedberg, peut se passer de la confrontation permanente avec la réalité. Anticiper la pertinence des éléments retenus pour expliquer un phénomène, comporte évidemment le risque de s'enfermer dans les catégories préétablies que l'on a acceptées comme point de départ parce qu'elles étaient conformes aux idées reçues. Et c'est seulement par un travail incessant d'analyse de la signification de nombreuses observations naturelles ou provoquées, et d'exigences méthodologiques locales et globales que l'on peut relier ces observations aux hypothèses sur les jeux par rapport auxquelles elles sont rationnelles et sur le système didactique qui contient ces jeux.

6. LES SITUATIONS ADIDACTIQUES

6.1. Les sous-systèmes fondamentaux

6.1.1. Schémas classiques

En première approche, le jeu didactique met en relation un premier joueur : le système éducatif – le maître – porteur de l'intention d'enseigner une connaissance et un second joueur, l'enseignant, l'élève. Nous avons montré précédemment la nécessité du maître, réel ou intériorisé.

Est-il possible de définir le jeu didactique en se limitant à ces deux sous-systèmes ? Plusieurs schémas ont été proposés pour cela, celui de la communication dû à Osgood²⁶ et celui du conditionnement scolaire dû à Skinner²⁷.

Dans le schéma de la communication, le système éducatif est un émetteur d'informations, l'élève un récepteur qui décode les messages qu'il reçoit, à l'aide de son répertoire. L'enseignement consiste, à l'aide de messages formés uniquement avec le répertoire du récepteur – pour qu'ils soient intelligibles – de susciter la création de nouveaux éléments à joindre au répertoire (figure 2). Il est clair que la règle qui s'impose à un maître qui adopterait ce modèle, serait de ne jamais

25. *NdE* : Guy Brousseau renvoie ici à la section 6, le lecteur trouvera une formulation originale dans Brousseau (1970). Les travaux auxquels renvoie Guy Brousseau sont en particulier illustrés par le chapitre 4 du présent ouvrage.

26. *NdE* : Osgood *et al.* (1957).

27. *NdE* : Brouhaud du Boucheron *et al.* (1970).

introduire de construction connue portant sur des concepts connus. Ce qui est communiqué, c'est seulement le savoir sous sa forme culturelle et pour les mathématiques, sous leur forme axiomatique. Ce modèle est insuffisant pour de nombreuses raisons. Par exemple, il ne permet pas de définir le sens de ces messages mémorisés autrement que comme reformulation des messages antérieurs. Pourquoi ces messages seraient-ils mémorisés ailleurs ?

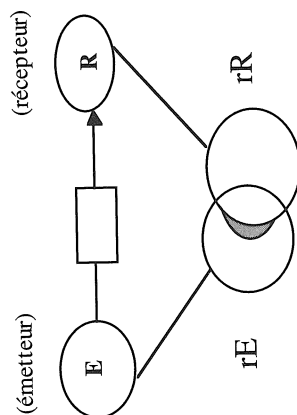


FIGURE 2

Les apprentissages « par appréhension statistique où les systèmes les plus fréquemment proposés par l'émetteur s'insèrent peu à peu dans le répertoire du récepteur en modifiant celui-ci »... imaginés par A. Moles (1967, p. 110) relèvent d'hypothèses empiristes sensualistes depuis longtemps réfutées. Cette interprétation suppose aussi que dans tout message qui lui sera adressé, l'élève reconnaîtra ce qui est un savoir nouveau à apprendre... quelle transparence !

Le behaviorisme (figure 3) répond à cette objection en proposant un schéma d'apprentissage composé de deux sous-systèmes : l'élève qui influence (nous dirons qui agit sur) le milieu, et le milieu qui « informe » ou sanctionne l'élève.

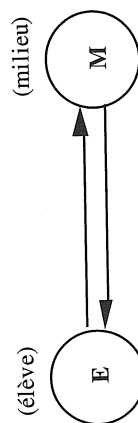


FIGURE 3

L'élève, perturbé par l'influence du milieu, tente d'annuler ces sanctions par des modifications du milieu et/ou par des apprentissages qui le modifient, lui. Bien sûr, l'enseignant est une partie du mi-

lieu et peut même se substituer à lui. Ce schéma suppose que le savoir peut s'exprimer sous forme d'une liste de couples stimulus-réponse. Cette thèse a d'abord été réfutée par Chomsky-Miller à propos de l'apprentissage de la langue maternelle qui a été reconnue comme ne pouvant être engendrée, au mieux, que par un automate fini et par un modèle stimulus-réponse. Malgré l'objection de Suppes (pour tout automate fini, il existe un modèle S.R. qui lui est asymptotiquement équivalent), les considérations de Nelson et Arbib sur la vitesse de convergence de ces modèles les a condamnés²⁸.

6.1.2. Première décomposition proposée

Sans rejeter pour l'instant les réductions ci-dessus, il apparaît qu'il faut considérer deux types de jeux distincts :

- a) les jeux de l'élève avec le milieu adidactique, qui permettent de préciser quelle est la fonction du savoir après et pendant l'apprentissage. Ces jeux sont évidemment spécifiques de chaque connaissance;
- b) les jeux du maître en tant qu'organisateur de ces jeux de l'élève (en tant qu'ils sont aussi spécifiques du savoir visé). Ces jeux concernant au moins trois partenaires et généralement quatre : (le maître, l'élève, l'environnement immédiat de l'élève, le milieu culturel). Le jeu du maître (figure 4) dans chaque système d'action concret, définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance.

28. Brousseau et Gabinski (1976) donne une précision assez complète de cette question et une expérience (Mayonnave 1972) apporte une vérification expérimentale qui consiste à comparer la vitesse d'apparition de certains théorèmes (en actes) chez des élèves de dix ans avec les prévisions d'un modèle stochastique d'apprentissage. L'accord est convenable dans le cas d'une situation simple (course à 7). Les enfants sont beaucoup plus rapides que ne le prévoit le modèle, quelles que soient les valeurs de ses paramètres de commande. *NdE* : voir « La course à 20 », Introduction à cet ouvrage. Pour les références indiquées par Guy Brousseau, voir Suppes (1969, 1976), Nelson (1969), et Arbib (1976, 1976a).

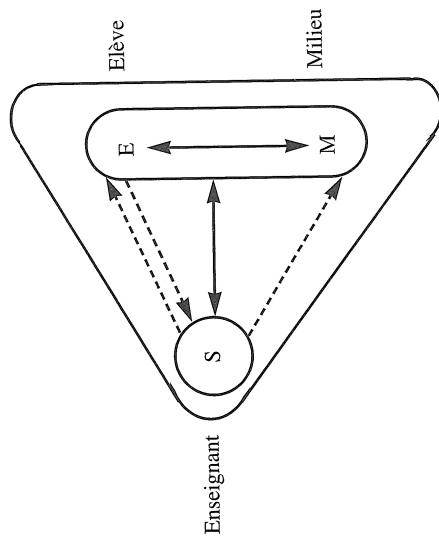


FIGURE 4

Il découle de cette définition que les deux types de jeux principaux du maître sont la *dévolution* que nous avons déjà présentée, et l'*institutionnalisation*. Dans la dévolution, le maître met l'élève en situation adidactique ou pseudo-adidactique. Dans l'institutionnalisation, il définit les rapports que peuvent avoir les comportements ou les productions « libres » de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. Ces deux genres de négociations sont bien distincts. Les discussions qui précèdent ont bien fait pressentir pour le premier les éléments de choix, ses enjeux et ses règles, qui permettent de le modéliser en termes de jeux. Le second, beaucoup plus lié au contrat didactique est l'objet de travaux en cours²⁹. Il est préférable d'y revenir après l'étude de la situation adidactique.

6.1.3. Nécessité du sous-système « Milieu adidactique »

Ainsi, dans le cas général, la situation didactique ne peut être modélisée comme une simple communication, ou comme une simple interaction sociale. Il est nécessaire de faire intervenir un autre système.

Cette nécessité découle d'une des clauses du contrat didactique lui-même qui implique le projet de son extinction : il est sous-entendu, dès le début de la relation didactique, qu'un moment doit arriver où il se rompra. A ce moment, à la fin de l'enseignement, le système enseigné sera supposé pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques. Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de lire ses relations avec ces systèmes comme des nouvelles *situations adidactiques* et par ce moyen, leur apporter une réponse appropriée. Le *milieu* est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné.

Cette lecture peut se faire en réalité de différentes manières, mais la cohérence exige que nous la modélisions sous forme de « jeux » reconnus semblables à ceux que l'élève connaît. Le système enseigné peut alors prendre des décisions soutenues par ses connaissances, et de plus, établir entre les deux situations, l'ancienne et la nouvelle, des relations de signification. Il peut, au contraire, lire ces situations adidactiques sous forme de *jeux* nouveaux appelant de nouvelles réponses sans référence avec celles qu'il connaît. Il peut, dans tous les cas, y voir l'occasion de se poser des questions nouvelles et, éventuellement encore, sans réponse pour lui.

Inversement, la situation didactique doit comprendre, réellement ou simplement évoquée, une représentation de ces rapports futurs. Elle doit inclure et mettre en scène un autre système, distinct du système éducatif et qui représentera « le milieu ». Au fur et à mesure des progrès des élèves, cette représentation culturelle et didactique du milieu sera supposée se rapprocher de la « réalité » et les relations du sujet avec ce milieu devront s'appauvrir en intentions didactiques.

Il en résulte plusieurs conséquences :

- la relation didactique s'appuie toujours sur des hypothèses épistémologiques, conscientes ou non, explicites ou non et cohérentes ou non;
- l'analyse des relations didactiques implique la définition ou la reconnaissance de ces jeux « fondamentaux » et adidactiques, mettant en présence un milieu et un joueur, ces jeux étant tels que le savoir – tel savoir précis – apparaîtra comme *le* moyen de produire des stratégies gagnantes. Il faut pour cela disposer d'une forme particulière et très concrète de connaissances épistémologiques;
- à un moment donné de l'enseignement, l'élève se trouve engagé par son contrat didactique dans un rapport plus ou moins réel avec un milieu organisé (au moins en partie) par le système éducatif. Ce rapport a été organisé afin de justifier la production *pertinente* par l'élève de comportements qui sont les indices de l'appropriation du savoir. C'est-à-dire que la réponse de l'élève ne doit pas être motivée

29. NdE : voir, par exemple, Rouchier (1991), en particulier la section intitulée « L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques » (*ibid.* pp.26-65) ; voir aussi Margolinas (1993).

par des obligations liées au contrat didactique mais par des nécessités adidactiques de ses relations avec le milieu.

- les relations de l'élève avec le milieu peuvent être conçues (en particulier par le système éducatif) comme jouant des rôles très différents :

- par exemple la situation adidactique peut être incapable de provoquer aucun apprentissage. Toute la vertu didactique étant contenue dans le contrat didactique;
- à l'opposé, les effets réciproques du milieu et de l'élève peuvent être attendus comme suffisants à eux seuls pour provoquer les adaptations et les apprentissages escomptés (nous parlerons alors de situation d'apprentissage au sens strict). Le système éducatif se borne alors à choisir, organiser et maintenir des rapports assurant la genèse de la connaissance du sujet. Le renvoi permanent de l'élève à l'interrogation du milieu ne lui laisse pas longtemps ignorer que le contrat pédagogique est vidé de tout contenu didactique;
- le cas général est intermédiaire évidemment et conjugue un contrat didactique et une situation adidactique qui peut être aussi une situation d'apprentissage par adaptation.

6.1.4. Statuts des concepts mathématiques

Nous avons vu que la production et l'enseignement des connaissances mathématiques demandent un effort de transformation de ces connaissances en savoirs, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont présidé à leur apparition. Cependant, ces transformations ne font pas disparaître complètement leur caractère fondamental qui est de répondre à des questions : les questions - les motivations - changent, la plupart disparaissent du corps de la théorie mais subsistent sous la forme de problèmes. Il est assez clair pour la plupart des enseignants de mathématiques que seule la résolution de problèmes peut attester que l'élève a acquis, au moins en partie, les connaissances visées. Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie.

Il s'instaure une sorte de dialectique entre la capacité de la théorie mathématique à résoudre plus facilement le stock de problèmes existants et la capacité du stock de problèmes de faire fonctionner de façon non triviale les connaissances transmises. Cette dialectique repose sur un nécessaire équilibre entre l'activité scientifique qui tend à poser de nouvelles questions à résoudre, et ainsi augmente le champ des problèmes et des connaissances, et la communication de

ces connaissances qui pousse à une meilleure organisation théorique qui diminue la complexité du champ. Cette réorganisation banalise alors les problèmes anciens et permet la réduction du champ des problèmes nécessaires à l'appréhension des connaissances théoriques qui peuvent alors poser de nouvelles questions.

Ce système d'actions et de rétroactions n'assure pas un développement « régulier » des mathématiques car un équilibre ne peut que se rompre dans ce domaine et provoquer les différents types d'activités. En tout cas, il montre que la correspondance entre problèmes et connaissances évolue, et n'est pas intrinsèque. Ce n'est que sous le contrôle d'une théorie de ces rapports que l'on pourra proposer à l'enseignement des situations adidactiques.

D'autre part, si l'on considère l'évolution des connaissances et des concepts mathématiques, il est courant de constater qu'elle obéit souvent à un schéma que le fonctionnement que nous venons d'exposer tend à justifier.

L'étape finale, celle qui met le concept sous le contrôle d'une théorie mathématique, permet de le définir exactement par les structures où il intervient et les propriétés qu'il satisfait. Seule cette étape lui donne son *statut de concept mathématique* et le met à l'abri des ambiguïtés et des « erreurs » - mais non des reprises et des mises à l'écart.

Cette étape est généralement précédée d'une période où le concept est un objet, familier, reconnu, nommé dont on étudie les caractéristiques et les propriétés mais que l'on n'a pas encore, pour diverses raisons, organisé et théorisé. Telles la notion de fonction au XIX^e siècle ou celle d'équation au XVI^e, ou celle de variable au XX^e. Le fonctionnement et le rôle de ces *paramathématiques* est assez différent de celui des *concepts mathématiques*. Les premiers sont plutôt des outils et les seconds des objets dans le sens où l'entend R. Douady dans sa thèse³⁰.

Mais on peut dire aussi en prenant « le point de vue plus formel », plus « systémique » qu'en l'absence de statut mathématique avéré, les termes utilisés sont des outils qui répondent à des besoins d'identification, de formulation et de communication, et que leur usage repose sur un contrôle sémantique. Les mathématiciens les utilisent bien, non parce qu'ils en possèdent une définition qui donnerait sur eux un contrôle « syntaxique », mais parce qu'ils « les connaissent bien » et qu'aucune contradiction qui obligerait à les mathématiser davantage n'est apparue à leur sujet. Cet usage paramathématique correspond à une certaine économie d'organisation

30. NdE : Douady (1984, 1985, 1986).

théorique, donc d'économie pour la communication, l'enseignement et la résolution de problèmes. Il est très acceptable tant que les difficultés n'apparaissent pas : contradictions (les fondements des mathématiques à la fin du XIX^e siècle) ou champ sémantique trop étendu (comme par exemple le concept de probabilité juste avant Kolmogorov). Mais l'étape paramathématique d'un concept est vraisemblablement précédée d'un autre que Y. Chevallard a proposé d'appeler « *protomathématique* »³¹.

Il s'agit alors d'une certaine cohérence de fait dans les préoccupations des mathématiciens d'une époque, de points de vue, de méthodes, de choix de questions qui s'articulent très nettement en un concept aujourd'hui identifié mais qui, à l'époque, ne l'était pas.

Pour qu'on puisse parler de concept, il faut bien sûr que des indices suffisants témoignent que ces préoccupations convergentes n'étaient pas le simple fait du hasard ou de la nécessité mathématique, mais aussi celui d'un choix des mathématiciens de l'époque et que ces proximités de questions étaient perçues par eux comme liées, même s'ils ne possédaient aucun terme pour les identifier. Il ne s'agit donc pas de confondre des conceptions historiques au nom de leur identité mathématique. Par exemple, et en simplifiant beaucoup, Al Kwarismi s'occupait des rationnels mais pas vraiment des réels³² ; par contre, Stevin exposa toute la problématique des réels et le concept a donc atteint avec lui, le niveau protomathématique.

Cette hypothèse d'un objet de connaissance encore implicite mais réglant déjà les décisions dans un champ de questions, repose en fait sur la reconnaissance, a priori, de la possibilité d'interpréter les textes mathématiques à l'aide d'une sorte de représentation du travail du mathématicien. Elle implique donc la prise en charge, non seulement des mathématiques, de leur histoire et de leur épistémologie classiques, mais aussi d'une certaine part de la didactique, dans la mesure où elle prétend modéliser ce travail.

6.2. Nécessité de distinguer divers types de situations adidactiques

Bien qu'elle n'en soit ni l'original ni la copie, cette classification des différents statuts d'un concept mathématique correspond en fait assez bien à la différenciation des sous-système de la situation adidactique.

31. *NdE* : Chevallard 1985, pp. 49-56.

32. *NdE* : voir, cet ouvrage, chapitre 2 §1.3, chapitre 4 §12.

Il s'agit maintenant d'établir :

- une classification des interactions du sujet avec le milieu adidactique,
- une classification des types d'organisations de ce milieu,
- une classification des types de fonctionnement d'une connaissance,
- et une classification des modes d'évolution spontanée des connaissances.

Chaque classification devra se justifier assez clairement dans son propre domaine :

- par les différences importantes et évidentes entre les objets classés,
- par la simplification qu'elle peut apporter dans leur description, leur analyse et leur compréhension,
- par la pertinence de cette classification (et son importance par rapport à d'autres possibles) pour chaque domaine concerné,
- par son caractère complètement exhaustif.

Les classes obtenues doivent se correspondre et pouvoir s'organiser en un hyposystème. Par exemple, un certain type d'interaction est spécifique d'un type d'organisation sociale et matérielle, il favorise une certaine forme de connaissance et peut aussi la faire évoluer.

Ces hyposystèmes, ainsi identifiés, ont pour but de prévoir et d'expliquer certaines relations entre les interactions que l'on observe, (ou que l'on veut obtenir), les connaissances dont on constate ou vise l'acquisition, des contraintes créées par le milieu, etc. Ils sont donc un support pour produire des hypothèses falsifiables. Il n'est pas exigé qu'ils soient exclusifs, une même situation « réelle » pourra en présenter généralement plusieurs qui correspondront aux diverses composantes et aux divers savoirs en jeu. Ils sont supposés faire évoluer isolément les connaissances et les questions de l'élève, mais ils peuvent s'appuyer les uns sur les autres et s'articuler en processus ou en dialectiques organisées ou spontanées.

Rien n'obligera donc à les prendre comme une norme, un carcan où enfermer le fonctionnement de la connaissance et l'ingénierie didactique.

Ces conditions ne seront pas trivialement satisfaites, notamment la correspondance évoquée plus haut n'est pas assurée à l'avance, même s'il est possible de la soupçonner ou de la croire inévitable. Après coup, elle paraîtra évidente mais ses mises à l'épreuve expérimentales ont montré à quel point ces paris sont hasardeux.

Le caractère nouveau de l'objet d'étude rend difficile la perception de l'intérêt relatif des questions et la nécessité ou la contingence des réponses apportées.

formatif. L'information ainsi donnée est supposée changer au moins l'incertitude du milieu et en général son « état ». [2]

iii) Il existe enfin des interactions telles que les messages échangés avec le milieu sont des assertions, des théorèmes, des démonstrations, émis et reçus comme telles. La différence entre une information et une affirmation de validité est suffisamment claire et importante en mathématiques pour qu'il soit inutile d'insister ici. Nous verrons plus loin que ces déclarations peuvent être elles-mêmes de différents types, selon qu'elles portent sur la *validité syntaxique* ou sur la *validité sémantique* de l'énoncé contenue dans l'assertion, selon qu'elles interviennent comme preuve, démonstration ou comme axiomes ou définitions. On pourrait aussi évoquer la validité pragmatique, appréciation sur l'efficacité de l'énoncé. [3]

Il n'est pas nécessaire de prouver ici l'importance pour l'enseignement de distinguer ces trois types de production attendues de la part des élèves.

Ils sont désignés dans les travaux expérimentaux que cet essai théorique accompagnait³⁴ :

- le premier comme « *actions* » sous-entendu non compris les formulations ou les déclarations de validité qui peuvent les accompagner,
- le second comme « *formulation* » sous-entendu sans débats de preuve,
- le troisième - le terme n'est pas très heureux, mais il est utilisé depuis quatorze ans³⁵ - comme « *validation* ».

6.2.2. Les formes de connaissances

Les formes de connaissances qui contrôlent les interactions du sujet ont fait l'objet de nombreuses approches. Toutes tendent à opposer la plus explicite et la mieux assumée du savoir, celles qui s'expriment sur le mode « déclaratif » par exemple (Skemp³⁶), à des formes plus implicites : les représentations, les schèmes, les savoir-faire... qui s'expriment sur un mode plus « procédural ». Nous y avons ajouté une composante plus strictement linguistique : les codes et langages qui contrôlent les formulations.

34. NdE : cet ouvrage, chapitre 4.

35. NdE : Ceci fut écrit par Brousseau en 1984 et renvoie à la première présentation de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1970).

36. NdE : Skemp (1979).

6.2.1. Les interactions

Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :

- les échanges de jugements [3]³³
- les échanges d'informations codées dans un langage [2],
- les échanges d'informations non codées ou sans langage : les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste [1].

Ces catégories sont emboîtées car un échange de jugements est un échange d'informations particulières, et celui-ci un type particulier d'action et de décision. Elles le sont strictement.

i) Il existe des interactions où le joueur exprime ses choix et ses décisions sans aucun codage linguistique, par des actions sur le milieu. Nous assimilerons à cette classe d'interactions celles où apparaissent des messages d'un codage si facile par rapport à l'action qu'il ne jouera aucun rôle dans le jeu. De même que celles où il existe des échanges de messages mais sans rapport avec la solution du problème. Par exemple, le joueur s'exprime ou entretient une conversation anodine avec un tiers sans en attendre de rétroaction.

Il peut arriver aussi que le « joueur » soit un couple d'élèves coopérant à la prise commune de décision après avoir échangé des informations et des jugements. Mais cette relation composite comporte une composante d'action bien identifiable à laquelle se superposent d'autres interactions ayant des finalités locales et temporaires. Si l'échange d'information n'est pas *nécessaire* à l'obtention de la décision, si les élèves partagent les mêmes informations sur le milieu, la composante « action » est prépondérante. [1]

ii) De même, il existe des interactions où le joueur agit en émettant un message à l'intention du milieu antagoniste sans que ce message signifie l'intention d'émettre un jugement. Il ne s'agit pas seulement de classer dans cette catégorie les ordres, les questions, etc., mais aussi toutes les communications d'informations. Certes, la plupart des informations sont implicitement accompagnées d'une affirmation de validité. Mais dans la mesure où l'émetteur n'indique pas explicitement cette validité, il ne s'attend pas à être contredit ou appelé à vérifier son information, si le contexte ne donne pas une certaine importance à la question de savoir si l'information est vraie, comment et pourquoi ou si cette validité est susceptible d'être établie sans difficulté, alors le message sera classé comme simplement in-

33. Ces numéros renvoient tous au même type d'hypothèse : [1] Action, [2] Formulation, [3] Validation.

i) En simplifiant un peu, les formes de connaissances qui permettent de « contrôler » *explicitement* les interactions du sujet relatives à la validité de ses déclarations, sont principalement ses savoirs exprimables et reconnus comme tels par le milieu. Ils sont organisés en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée. [3]

La distinction entre un savoir et une connaissance tient d'abord à leur statut culturel ; un savoir est une connaissance institutionnalisée, le passage d'un statut à l'autre implique toutefois des transformations qui les différencient et qui s'expliquent en partie par les relations didactiques qui se nouent à leur propos.

Mais nous admettons en première approche, que les connaissances explicites et les savoirs interviennent de façon comparable dans le contrôle des jugements de « l'élève ». Ils forment en quelque sorte le « code » à l'aide duquel il construit, justifie, vérifie et démontre ses déclarations de validité.

Cette justification se réfère à la fois à la conviction profonde de l'élève et à la convention sociale acceptée.

Les preuves et validations explicites sont supposées s'appuyer les unes sur les autres jusqu'à l'évidence, mais leur articulation n'est sûrement pas automatique. Les savoirs et les connaissances s'actualisent dans une activité de recherche ou de preuve selon des modalités que l'heuristique cherche à découvrir et que l'intelligence artificielle tente de reproduire. Pour l'instant, elles restent assez inaccessibles à l'analyse scientifique et a priori au sujet lui-même. On peut les supposer gérées elles aussi par des représentations, des schèmes épistémologiques ou cognitifs, des modèles implicites, etc. La différenciation des types de connaissance que nous tentons ne doit pas aller plus loin qu'il ne faut pour organiser le débat didactique avec l'élève. Vraisemblablement, l'activité mentale brise ces fragiles distinctions et unifie ces modes de contrôle en une pensée complexe.

Cependant, il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de réalisations et l'assertion qui enclôt cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiomes. En généralisant cette distinction, un jugement est composé :

- d'une description ou modèle exprimé dans un certain « langage » ou (dans une certaine théorie) renvoyant éventuellement à « une réalité » (c'est-à-dire au dispositif du jeu en cours),
- et d'un jugement sur l'adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard des connaissances du sujet ou du milieu.

Il est très important de ne pas confondre a priori les connaissances et les savoirs, objets d'une activité de construction de la part de l'élève avec les connaissances qui décrivent les rapports que nous cherchons ici à établir sous un aspect unifié ou identique, ces distinctions sont bien évidentes dans les travaux sur la « pensée naturelle » que nous avons utilisés dans plusieurs recherches et notamment ceux de H. Wernuz³⁷.

ii) La formulation des descriptions et des modèles dont il est question est régie par un tout autre type de code. Même si la théorie des langages permet d'unifier la construction d'un énoncé et la démonstration d'un théorème, le recours constant, dans l'activité mathématique, à la langue naturelle et à toutes sortes d'autres types de représentations tels les dessins ou les graphes, exige de distinguer pour eux des codes et des modes de contrôles propres. [2]

iii) Les différents types de représentations ou les théorèmes en actes³⁸ qui régissent les décisions du sujet ne sont pas très faciles à identifier, même lorsqu'ils paraissent formulables ou explicites par le sujet. Mais de nombreux travaux commencent à montrer comment les régularités de comportements peuvent donner un accès à ce type de « modèles implicites ». L'importance qu'ils jouent dans les acquisitions reste un problème largement ouvert, trop souvent abordé de façon trop étroite. Il est certain que ces formes de connaissance ne fonctionnent ni de façon complètement indépendante, ni de façon complètement intégrée pour contrôler les interactions du sujet. L'étude des rapports qui s'établissent entre ces types de contrôles dans l'activité du sujet et du rôle qu'ils jouent dans les acquisitions, est un secteur de la psychologie, essentiel pour la didactique, étude à laquelle la didactique prétend d'ailleurs contribuer. [1]

6.2.3. L'évolution de ces formes de connaissance : l'apprentissage

Les connaissances évoluent selon des processus complexes. Vouloir expliquer ces évolutions uniquement par les interactions effectives avec le milieu, serait certainement une erreur car très tôt, les enfants peuvent interioriser les situations qui les intéressent et « opérer » avec leurs représentations « internes », des expériences mentales très importantes. Ils règlent ainsi aussi bien les problèmes d'assimilation

37. NdE : Wernuz (1978).

38. NdE : Le concept de « théorème en acte » a été introduit par Gérard Vergnaud. Une présentation détaillée de la théorie des champs conceptuels à laquelle appartient ce concept peut être trouvée dans (Vergnaud 1990).

(augmentation de schèmes déjà acquis par l'agrégation de faits nouveaux) ou d'accommodation (réorganisation des schèmes pour appréhender des questions nouvelles ou pour résoudre des contradictions). Mais l'intériorisation de ces interactions n'en change pas beaucoup la nature : le dialogue avec un opposant « intérieur » est certes moins roboratif qu'un vrai dialogue, mais c'est un dialogue. Existe-t-il des formes d'apprentissage et d'évolution des connaissances distinctes selon les types que nous venons d'exposer ? Les connaissances théoriques s'augmentent-elles et se restructurent-elles comme les langages et comme les modèles implicites ? Quels rôles jouent les différentes formes de connaissances dans les acquisitions des divers types ?

En mathématique, il existe un mode « conventionnel » de croissance des connaissances par le jeu de définition d'objets nouveaux dont on inventorie les propriétés qui servent à poser de nouvelles questions qui introduisent des définitions, etc. Si ce mode « axiomatique et formel » ne peut pas être retenu comme modèle global, même en se restreignant aux savoirs, il ne peut pas être entièrement rejeté, au moins comme modèle local. Il ne peut pas toutefois être étendu à l'apprentissage des représentations.

A l'opposé, les modes d'apprentissage du genre stochastique, fondés sur la répétition, ne paraissent guère adaptés aux connaissances complexes (de haut niveau taxinomique). Les descriptions de l'acquisition du langage par les jeunes enfants (comme celle proposée par E. Alarcos Llorach³⁹ mettent en évidence que les productions propres au sujet (comme le babillage) apparaissent spontanément, mais presque comme des exercices, qu'elles s'insèrent dans les relations avec le milieu et là s'ajustent naturellement ou sont corrigées par des interventions assez variées. Les étapes de cette acquisition ne sont compréhensibles que par l'étude globale des relations du sujet avec son milieu. Par exemple, le passage du mot-phrase à la phrase composée de plusieurs mots n'est pas une simple concaténation.

Une discussion serrée de l'intérêt de distinguer des formes d'acquisitions spécifiques des différentes formes de savoir évoquées plus haut, sort du cadre de ce texte. Pour l'essentiel, il n'apparaît pas de contradiction avec les modèles épistémologiques que Piaget rattache à sa théorie de l'équilibration, ni avec les conceptions de Bachelard. Au contraire, nous avons montré dans plusieurs études précises que la classification des types de situations pouvait éclairer ces théories et les prolonger⁴⁰.

39. Dans « langage » encyclopédie de la Pléiade.

40. *NdE* : voir dans le présent ouvrage le chapitre 4 et le chapitre 5 §3.

Il faut insister sur le caractère « dialectique » de ces processus : les conceptions antérieures des élèves et les problèmes qui leur sont posés par le milieu conduisent à de nouvelles conceptions et à de nouvelles questions dont le sens est fondamentalement local.

Un des principaux arguments en faveur des modes d'évolution différents pour les différents modes de connaissances est celui que nous avons avancé plus haut et qui s'appuie sur l'histoire des mathématiques et sur l'épistémologie : l'évolution des concepts proto-mathématiques, celle des concepts paramathématiques et celle des concepts déjà mathématisés est différente. Inversement, l'étude de l'évolution des connaissances des élèves, à condition qu'elle soit convenablement étayée par l'analyse des conditions portant sur les situations, peut apporter un éclairage intéressant sur les processus historiques et constituer une sorte d'épistémologie expérimentale. C'est ce que nous avons tenté de montrer dans de nombreux travaux expérimentaux⁴¹.

6.2.4. Les sous-systèmes du milieu

Le fait que les différents types d'interactions avec le milieu et que les différentes formes de connaissances se justifient a priori et indépendamment, permet déjà de discuter les particularités du milieu qui leur sont nécessaires.

Par les questions du genre : « Pourquoi l'élève ferait-il ou dirait-il ceci plutôt que cela ? », « Que doit-il lui arriver s'il le fait ou s'il ne le fait pas ? », « Quel sens aura la réponse si on la lui fournit ? », il est possible de dégager les conditions les plus importantes que ces typologies imposent au milieu.

Cependant, ici encore, les catégories sont assez évidentes :

[3] Le milieu comprend-il ou non un opposant (ou un proposant) auquel le sujet doit se confronter pour atteindre le but fixé dans un échange d'opinions ?

[2] Le milieu comprend-il un récepteur des messages que l'élève doit émettre pour atteindre le but visé ?

La réponse à ces deux questions détermine des dispositions du milieu, et des règles de jeux totalement différentes.

Examinons-la en soulignant que pour l'instant, le milieu dont il s'agit est un milieu réel et non pas invoqué ou simulé, et que le professeur est supposé ne pas intervenir. Il est clair dans ce cas que les conditions ci-dessus correspondent à des différences très importantes

41. G. Brousseau, « Problèmes de didactique des décimaux ». *NdE* : voir le présent ouvrage chapitre 4.

de l'organisation de la classe ou du milieu. Trouver à qui parler et sur quoi agir sont peut-être les problèmes principaux de l'élève.

6.3. Première étude des trois types de situations adidactiques

6.3.1. Schéma de l'action

La figure 1 (p. 83) symbolise le modèle général de l'action sans interlocuteur.

Elle permet déjà de fournir une grille de lecture d'une situation réelle d'enseignement.

- Le « partenaire » (le milieu) est-il perçu comme dénué d'intentions didactiques ?
- A chaque coup, l'élève a-t-il à choisir effectivement un état parmi plusieurs possibilités ? Sait-il entre lesquelles ?
- L'élève peut-il perdre ? Le sait-il, connaît-il à l'avance l'état final (la classe des états finaux) en particulier l'état final gagnant ?
- Connaît-il les règles précises du jeu *sans* connaître une stratégie gagnante ? Peut-on lui enseigner les règles sans donner une solution ? (a-t-il une recherche de stratégie optimale à faire ?).
- La connaissance visée est-elle nécessaire pour passer de la stratégie de base à une stratégie meilleure (ou optimale) ? Est-elle le moyen principal de ce passage ?
- L'élève a-t-il une chance de trouver lui-même la stratégie cherchée s'il l'emprunte (à un autre élève) ?
- Les « réponses » (adidactiques) du système aux choix défavorables de l'élève sont-elles néanmoins pertinentes pour la construction de la connaissance (donne-t-elle des indications spécifiques de l'erreur) ?

- Les contrôles des décisions sont-ils possibles (l'élève est-il conduit à les noter, à les observer) ?
- Une attitude réflexive est-elle utile, nécessaire, pour progresser dans la solution ?

Avec ces derniers points, nous approchons de conditions limites d'une situation d'action : considérer la validité d'une solution relève d'une situation de validation ; certes, un élève qui réfléchit naturellement à son jeu est dans une situation adidactique effective d'action, mais il interiorise et simule en quelque sorte une situation de validation. Si l'enseignant est conduit à vouloir que l'élève ait cette position réflexive, l'incantation (« Réfléchis ! Regarde ce que tu as fait... ») pourra ne pas suffire et le maître devra communiquer son désir didactique par le moyen d'une situation de validation.

L'ouverture, que nous représentons en première approche par une incertitude au sens de la théorie de l'information, est une des condi-

tions les plus importantes ainsi mise en lumière. La distinction entre la situation didactique et la situation adidactique permet de concevoir pour l'élève, des situations ouvertes d'enseignements de la pensée mathématique parce qu'elle est déjà « faite »⁴². La manipulation de cette ouverture au niveau d'une classe entière est un problème technique délicat, mais accessible : par exemple, faire en sorte que la recherche de chaque élève ne soit pas écrasée par le travail d'un autre est un problème didactique (et non de pédagogie).

Cette grille de lecture peut aussi servir à la conception de situations didactiques nouvelles. Chaque jeu proposé peut être examiné et comparé à ceux que l'on connaissait déjà. Il est possible de fixer des problèmes d'ingénierie, de classer des dispositifs connus et de regrouper *du point de vue de cette modélisation*, les productions semblables, d'en prévoir de nouvelles. Le problème essentiel qui demeure du domaine expérimental est celui de l'importance de la réalisation, ou non, des conditions ainsi proposées, comme découlant logiquement, ou systématiquement des possibilités du modèle.

Les variables qui apparaissent ainsi ont des raisons théoriques d'être pertinentes, et des calculs économiques de complexité, ou d'efficacité peuvent les préciser⁴³. La confrontation avec la contingence ou avec l'expérience telle qu'elle est pratiquée dans la plupart des recherches est incontournable.

Le modèle, à ce point de vue, joue son rôle depuis déjà dix ans, son efficacité est attestée par le nombre de situations d'enseignement originales qu'il ne cesse de produire.

Lorsque les propriétés d'une situation capable de justifier (ou de provoquer) la mise en œuvre d'une connaissance spécifique sont mieux connues, il est possible d'étudier les possibilités qu'a la première de faire évoluer la seconde. Les variables didactiques sont celles qui influent sur l'apprentissage et dont l'enseignant peut choisir la valeur [Ingénierie – Recherche sur l'enseignement du calcul

42. NdE : Guy Brousseau ajoute les précisions suivantes : la question en jeu ici est mieux décrite par une métaphore : si on lâche une bille sur le bord d'un bol on sait qu'elle terminera sa course au fond, mais on ne pourra pas prédire et encore moins déterminer, sa trajectoire – cela pourra être une descente en spirale, ou une oscillation, ou... La situation peut ainsi être à la fois fermée pour l'enseignant qui sait où la bille terminera sa course, et ouverte pour l'élève à qui seul appartient la trajectoire (communication personnelle, septembre 1995).

43. NdE : voir en particulier Ratsimba-Rajohn (1982).

numérique]. De nombreux problèmes d'apprentissage ont été étudiés à l'aide de ce modèle⁴⁴.

6.3.2. Schéma de la communication

Le « milieu » comprend un système récepteur et/ou émetteur avec lequel le joueur échange des messages.

Nous supposons ici que l'objet de ces messages n'est pas d'agir sur le récepteur (de le changer, de prendre du pouvoir sur lui, de le contraindre, etc.) mais d'*agir* par son intermédiaire sur le dispositif « milieu ».

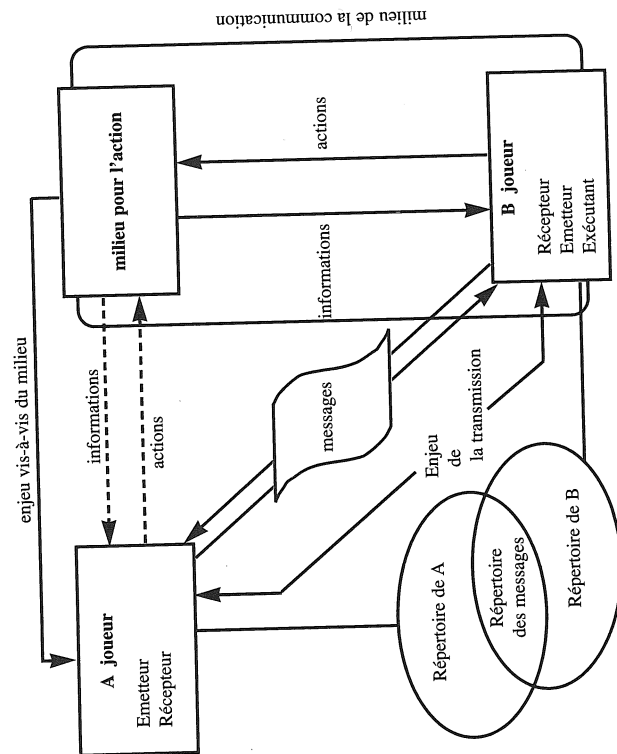


FIGURE 5

44. *NdE* : ici Guy Brousseau renvoie à des travaux qu'il précise dans une section particulière de la liste de références bibliographiques de son article. Le lecteur trouvera ces indications dans la liste générale des références de cet ouvrage : Balacheff (1982), Berthelot et Berthelot (1983), Bessot et Richard (1979), Brousseau et Brousseau (1987), El Bouazzaoui (1982), Galvez (1985), Katambra (1986), Maudet (1982), Mopondi (1986), Perez (1984), Quevedo de Villegas (1986), Ratsimba-Rajohn (1981), Rouchier (1980).

L'élève est toujours engagé dans un jeu avec un dispositif milieu dénué d'intentions didactiques. S'il avait à la fois des informations et des moyens d'actions suffisants pour choisir seul les état du « milieu », ses messages n'ayant aucune finalité dans le jeu pourraient être quelconques. Nous supposons aussi pour l'instant qu'il n'y a qu'un seul joueur A. Le récepteur n'a pas d'autre enjeu que de servir. Le joueur B ne fait personnellement aucun choix.

Les différents cas sont évidents :

- moyens d'actions insuffisants. A doit décrire pour B l'action qu'il devait effectuer et souvent aussi une partie du milieu pour que le message soit intelligible.
- informations insuffisantes pour A mais moyens suffisants, c'est B qui doit décrire le milieu et A, décoder la description et diriger l'observation.
- moyens d'action et informations insuffisantes pour A...

Dans le premier cas, par exemple pour A, le sens du message (le contenu information nécessaire au jeu) qu'il envoie à B, peut être représenté par les passage (le couple) des choix d'action que le jeu offre à celui choisi par A.

Dans le deuxième, c'est le passage des choix envisagés par A avant l'apport d'information de B à ceux qu'il envisage après.

Le fait que B soit aussi un joueur peut avoir une certaine importance, car il diminue la liberté de A donc le sens de son action. Il faut bien sûr qu'il coopère avant A. Le schéma n'est pas différent, que les rôles soient bien identifiés ou indifférenciés (mais alors un joueur peut ne laisser à l'autre aucun choix à faire, aucune action).

Les messages échangés sont sous le contrôle des codes linguistiques, formels ou graphiques et donc les font fonctionner⁴⁵.

L'enjeu de la communication elle-même s'exprime par les rétroactions qu'exercent l'un sur l'autre les deux interlocuteurs, pour s'assurer qu'ils se sont compris. Leurs exigences porteront sur la conformité au code (minimal pour l'intelligibilité du message) l'ambiguïté, la redondance, le manque de pertinence (des informations superflues) et l'efficacité (les caractères d'optimalité) du message.

En combinant judicieusement un milieu (un jeu au sens 4) et des conditions convenables d'échange du message (portant sur le canal

45. *NdE* : les situations décrites dans cette section sont des situations de communication, le deuxième type de situation fondamentale de la Théorie des situations (Brousseau 1970). Brousseau n'introduit pas explicitement cette désignation dans cette section mais l'utilise incidemment au début de la section suivante.

par exemple), il est possible d'influencer le type et le sens des messages obtenus du joueur.

Il est possible aussi de faire évoluer le code lui-même : passer d'une formulation en langue naturelle à un énoncé formel, ou des métaphores à des descriptions systématiques.

Ces résultats ont été obtenus dans plusieurs recherches, mais il faut s'attendre aussi à des déboires à cause de l'énorme capacité d'invention sémiologique des enfants⁴⁶.

Ce schéma de situations didactiques présente un certain intérêt pour donner du sens à (ou pour analyser le sens d') un message, une formule. Prenons un exemple tout à fait théorique et un peu provocateur : cherchons une organisation sociale (théorique) pour faire apparaître l'émission (par un enfant de 5 ou 6 ans pour fixer les idées) de la formule « $13=9+4$ » prise comme information et (non comme assertion). Il faut que l'émetteur E de la formule s'adresse à un destinataire D. Si D connaît la signification de 13 et celle de $9+4$ le message ne peut lui apporter éventuellement d'information que sur « = » paradigme d'un ensemble très restreint : {=, $\equiv$ }. L'énoncé sera plus informatif si l'un des deux termes n'est pas connu du destinataire, par exemple si l'élève décrit conventionnellement un calcul. (9 est connu ainsi que 4, le résultat de leur somme est 13).

Mais si l'on considère que le premier terme est lui-même un message, le message doit être émis par un émetteur E_1 pour un destinataire D_1 afin de l'informer par exemple sur l'état d'un stock. $9+4$ est un message émis par E_2 à l'intention de D_2 dans un *autre code* pour l'informer sur l'état d'un autre stock ou du même, alors, le message complet informe D_1 que les deux messages 13 et $9+4$ désignent le même objet. Il ne reste plus qu'à trouver le jeu qui rende plausible ce fonctionnement de 6 personnes.

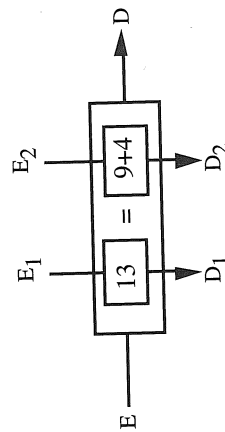


FIGURE 6

Pourquoi D aurait-il besoin de savoir si les deux messages en « langue 1 » et en « langue 2 » désignent ou non le même objet...

46. NDE : voir en particulier les travaux de Laborde (1982).

Ce type de raisonnement ne conduit pas toujours à un jeu utilisable en classe (c'est le cas ici), bien que des essais aient été faits⁴⁷, mais il est un moyen très efficace pour analyser le sens des productions des élèves et pour proposer des moyens de contrôle.

Des variantes sont aisément envisageables comme l'autocommunication qui conduit plus aisément pour la mise en mémoire, à des codes personnels. Les passages de l'oral à l'écrit, ou du graphe au discours ont été souvent observés et ont donné lieu à l'étude de l'influence de nombreuses variables⁴⁸.

Utiliser le langage mathématique de façon précise dans des communications délibérées entre élèves est certainement un des meilleurs résultats pédagogiques de ce type de situations. Il faut souligner l'importance :

- de la qualité du jeu avec le milieu afin d'assurer et de maintenir la pertinence et la richesse du discours des élèves,
- de la fréquence d'emploi qu'il suscite dans les communications,
- de la possibilité d'analyser les messages produits.

6.3.3. Schéma de la validation explicite

Les situations de communication convenables favorisent l'apparition de messages qui peuvent avoir une forme très proche du discours mathématique et qui sont concrètement significatifs pour un certain « milieu ». Mais ces messages n'ont pas le sens d'un texte mathématique. Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part (figure 7). Les deux joueurs sont alternativement un « proposant » et un « opposant » ; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple « milieu/message ». Ce couple est le nouveau dispositif, le « milieu » - le jeu au sens 4 - de la situation de validation. Il peut se présenter comme un problème accompagné de ses tentatives de solutions, comme une situation et son modèle, ou comme une « réalité » et sa description...

47. NDE : en particulier de telles situations ont été mises en œuvre au cours de l'année 1971 dans des classes d'application de l'Ecole normale de Caudéran (Gironde).

48. Cf. *La création d'un code à l'école maternelle et L'enseignement de la géométrie*. NDE : la première indication de Guy Brousseau renvoie à (Perez 1984), la seconde renvoie à un thème de recherche bien étudié par l'auteur (voir Brousseau 1983a, 1987).

Alors que l'informateur et l'informé ont des rapports dissymétriques avec le jeu (l'un sait une chose que l'autre ignore), le proposant et l'opposant doivent être dans des positions symétriques, aussi bien en ce qui concerne les informations et les moyens d'action dont ils disposent sur le jeu et sur les messages, qu'en ce qui concerne leurs rapports réciproques, les moyens de se sanctionner mutuellement et les enjeux vis-à-vis du couple milieu/message.

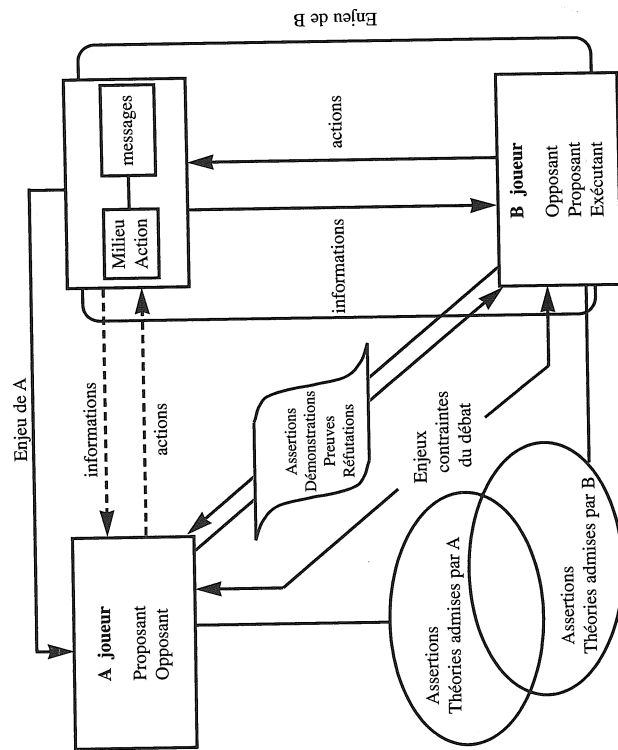


FIGURE 7

En particulier, l'un des joueurs ne doit pas avoir la possibilité d'obtenir l'accord de l'autre par des moyens « illégitimes » tels que l'autorité, la séduction, la force, etc.

La didactique se trouve devant le défi de produire des situations qui permettront à l'élève de mettre en œuvre les savoirs et les connaissances mathématiques comme moyens effectifs de convaincre (et donc de se convaincre) tout en le conduisant à rejeter les moyens théoriques qui ne sont pas de bonnes preuves ou réfutations.

Le sens exact des déclarations de mathématiques est conditionné par cet éventail de choix : ce que dit un théorème c'est aussi ce qu'il contredit, ce que dit une démonstration c'est, non seulement ce qui est supposé admis par le proposant et l'opposant, mais aussi ce qui aurait pu être contesté. Le discours mathématique se construit en

partie contre d'autres procédés d'acquisitions de croyance et de connaissance et non seulement avec.

Précisons le jeu de la preuve.

« A » propose un énoncé : c'est la déclaration d'une propriété dont la connaissance est utile pour maîtriser les rapports (de A ou de B) avec le milieu, l'enjeu fondamental est toujours de « gagner » à un certain « jeu ».

« B », s'il veut s'en saisir et s'en servir, doit :

– soit « payer » A chaque fois, c'est une reconnaissance de validité pragmatique,

– soit « payer » A une fois pour toutes en acceptant la proposition comme vraie.

Mais il peut aussi engager le processus de réfutation s'il pense que la déclaration de A est fausse.

Réfutation pragmatique. Il peut « obliger » A à jouer un coup devant de son énoncé. Si la déclaration est fausse et si la situation est correcte, le coup doit être perdant (ce n'est pas si facile à obtenir). C'est le dispositif faisant fonctionner le contre-exemple. B peut obliger A à jouer son coup perdant aussi souvent qu'il le veut (que c'est à lui de jouer) jusqu'à ce que A retire sa déclaration.

Réfutation intellectuelle. B peut aussi proposer à A un marché : il peut lui proposer une réfutation explicite de sa déclaration initiale, cette réfutation peut lui économiser une coûteuse obstination. Si A accepte (il paye un peu a priori), par exemple en se dessaisissant du trait, B devient alors à son tour proposant. A accepte la réfutation, ou la rejette... Les arguments sont toujours ceux que l'opposant peut recevoir – de même que dans toute communication le répertoire doit être celui du récepteur pour que le message soit compris. Ainsi se crée « de facto » une théorie, en tant qu'ensemble d'observations acceptées par les deux joueurs. Il peut arriver à chaque instant que l'un d'eux découvre qu'une connaissance n'est pas partagée alors qu'il croyait que son partenaire pouvait en disposer. Toutes les assertions de la « théorie » sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction.

Les moyens techniques de ces démonstrations et les arguments peuvent être d'ordre sémantique – adéquation au « milieu », au problème – ou d'ordre syntaxique à plusieurs niveaux : articulation et validité mathématique, constitution logique et même formelle de l'argument. Mais aussi d'ordre épistémologique, ainsi que le montre Lakatos (1976).

L'usage de situations de preuve restaure un environnement socio-culturel qui donne de l'épaisseur au discours mathématique. Les si-

tutions de validation peuvent aider le professeur, faire vivre dans sa classe une véritable petite société mathématique. Mais, en restaurant un sens, on prend le risque d'augmenter les difficultés de ceux qui n'entreront pas dans ce jeu, et pour qui le théorème et même les démonstrations ne sont que des savoirs comme d'autres à exhiber à l'occasion. Une situation de validation n'est pas, a priori, la meilleure situation d'apprentissage de savoirs institutionnalisés. Elle peut même susciter des obstacles didactiques et ressusciter des obstacles épistémologiques gênants. Elle est pourtant essentielle comme paradigme des autres situations mathématiques. Il est regrettable, par exemple, que la géométrie enseignée dans l'enseignement secondaire n'utilise pas ces processus, alors qu'elle peut se justifier comme premier exemple de la pensée axiomatique en face d'un champ naturellement maîtrisé par d'autres moyens. La mathématisation donnée toute faite, est ici contradictoire avec l'objectif didactique annoncé.

A côté de leurs propriétés épistémologiques ou didactiques, ces situations sociales peuvent présenter des avantages intéressants dans le domaine de la motivation des élèves – motivations assez souvent transférables.

Cette motivation peut se manifester, non seulement dans le cas où la situation est réellement organisée et effectivement vécue, mais aussi quand elle est simulée, racontée ou intériorisée.

Les élèves coopèrent dans la mesure où ils arrivent à partager le même désir d'atteindre une vérité.

Ils doivent recevoir, a priori, avec respect, le point de vue de leur opposant et défendre le leur sans fausse modestie, aussi longtemps qu'ils ne sont pas convaincus du contraire ; mais s'il leur apparaît qu'ils se sont trompés, ils doivent apprendre à changer immédiatement de position, sans amour propre déplacé et quel que soit le prix social.

Ces situations montrent l'ancrage profond de l'activité mathématique dans la pensée rationnelle et l'importance éducative de leur enjeu qui dépasse le simple domaine de l'apprentissage de connaissances. Dans les situations concrètes qui relèvent de ce modèle, lorsqu'elles sont exploitables, le caractère un peu formel de cette « compétition » disparaît. Les contraintes sont bien présentes mais n'apparaissent pas avec cette sécheresse.

PRÉLUDE AU CHAPITRE 2

L'idée d'obstacles à l'apprentissage des concepts mathématiques a été évoquée dans le chapitre précédent (au paragraphe 4.2). Brousseau discute, à propos des « paradoxes de l'adaptation des situations », la possibilité que la connaissance de l'élève devienne un obstacle à des apprentissages futurs. Il suggère que certains de ces obstacles sont « inévitables et constitutifs du savoir » (ibid.). Il s'agit là d'un élément clé de la problématique de la théorie des situations didactiques.

En 1976, dans une communication qui fut ensuite publiée dans les actes des 28^e rencontres de la CIAEM, tenues à Louvain-la-Neuve, et intitulées « La problématique et l'enseignement des mathématiques », Brousseau introduit le concept d'obstacle épistémologique qu'il emprunte à l'épistémologue et philosophe français Gaston Bachelard. Comme l'analyse Perrin-Glorian (1994 p.112) : « La notion d'obstacle apparaît très vite comme une nécessité dans la théorie parce que dans un apprentissage par adaptation, les connaissances créées par les élèves sont le plus souvent locales et liées "de façon contingente et induite" à d'autres connaissances, elles aussi "provisoires et incorrectes" »¹.

Cette reconnaissance de l'existence d'obstacles intrinsèquement liés à la nature de la connaissance soulève la question des caractéristiques des situations permettant de les dépasser. C'est pour cette raison que Brousseau affirme dans le résumé accompagnant la reproduction de ce texte fondamental dans la revue *Recherches en didactique des mathématiques* en 1983 : « l'identification et la caractérisation d'un obstacle sont essentielles à l'analyse et à la construction des situations didactiques ». La *problématique* des obstacles épistémologiques met les mathématiques au cœur de la théorie des situations didactiques et explique les liens privilégiés de champ de recherche avec les mathématiques.

Dans le chapitre qui suit, nous avons associé deux textes de Brousseau qui présentent le concept d'obstacle épistémologique et analyse ses relations à la théorie des situations didactiques :

1. Perrin-Glorian cite Brousseau.