Le Théorème de Bayes

Cours ‘ Interprétation de la preuve ’
(4)

Le processus du raisonnement

Probabilités a priori

se combinent avec

Rapport de vraisemblance

Probabilités a posteriori

Autres informations (dossier, enquête, etc.)

Données analytiques

Décision sur l’hypothèse

La théorie de Bayes

La théorie de Bayes est le fondement d'une partie de la théorie de la décision.

Probabilités a posteriori *Probabilités a priori*

$$\frac{P(H_1|E,I)}{P(H_2|E,I)} = \frac{P(H_1|I)}{P(H_2|I)} \frac{P(E|H_1,I)}{P(E|H_2,I)}$$

Rapport de vraisemblance

Un exemple pratique

Pour illustrer l'importance de ce théorème en termes de modélisation du diagnostic :

- supposons que *A* soit l'événement *atteint de la maladie M.*
- supposons que *B* soit l'événement *positif pour le test diagnostic D.*

Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité pour qu'un patient positif pour le test diagnostic *D* soit atteint de la *M*, en fonction de la probabilité de la maladie *M* dans la population.

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes vise à calculer les probabilités a posteriori d'un événement en fonction des probabilités a priori de cet événement.
A priori et a posteriori s'entendent par rapport à la connaissance d'une information. L'exemple typique est celui du diagnostic : a priori on juge que le patient a une telle probabilité d'avoir la maladie *M*.
Que devient a posteriori cette probabilité lorsque l'on apprend le résultat de tel examen clinique ou biologique ?

Théorème de Bayes

Ce théorème est un outil de modélisation de la démarche diagnostique (en sens large).

L'idée de base du théorème de Bayes est de calculer les probabilité a posteriori d'un événement A, sachant qu'un autre événement B s'est produit, en fonction de sa probabilité a priori : on veut donc exprimer $P(A|B)$ en fonction de $P(A)$.

Théorème de Bayes

Tout d’abord, si *A* et *B* sont indépendants, on vient de voir que $P(A|B) = P(A)$, puisque *B* n’apporte pas d’information sur *A*.
Que se passe-t-il si *B* apporte une information ?
Dans un tel cas, on a :

$$P(A \mid B) \neq P(A \mid \overline{B})$$

La probabilité de A sera différente selon que l’on a l’information que B s’est produit, ou que B ne s’est pas produit.

Théorème de Bayes

On peut écrire :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \, et \, B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \; P(A)}{P(B)}$$

Théorème de Bayes

La clé de démonstration c'est d'écrire que :

B = (B et A) ou (B et non-A)

Cette égalité rappelle que les événements élémentaires qui définissent B peuvent être classés en deux catégories :

- ceux qui réalisent A (ils forment B et A),
- ceux qui ne le réalisent pas (ils forment B et non-A.

De plus, (B et A) est incompatible avec (B et non-A) parce que A et non-A le sont.

Théorème de Bayes

On peut donc écrire :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\ P(A)}{P(B\ et\ A) + P(B\ et\ \overline{A})}$$

On a de plus :

$$P(B\ et\ A) = P(B \mid A)\ P(A)$$
$$P(B\ et\ \overline{A}) = P(B \mid \overline{A})\ P(\overline{A})$$

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes s'écrit :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid \bar{A})\, P(\bar{A})}$$

Intuition - le jeu des trois cartes

On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge.
On mélange les trois carte au fond d'un chapeau puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol.
Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Intuition - le jeu des trois cartes

Soient *RR*, *NN* et *RN* respectivement les événements, ‘la carte choisie est entièrement rouge’, ‘entièrement noire’ et ‘bicolore’.

Soit encore *R* l’événement, ‘la face apparente de la carte tirée est rouge’.

Intuition - le jeu des trois cartes

On aura :

$$P(RN|R) = \frac{P(RN \cap R)}{P(R)}$$

$$P(RN|R) = \frac{P(R|RN)\ P(RN)}{P(R|RN)\ P(RN) + P(R|RR)\ P(RR) + P(R|NN)\ P(NN)}$$

$$P(RN|R) = \frac{(1/2)\ (1/3)}{(1/2)\ (1/3) + (1)\ (1/3) + (0)\ (1/3)} = \frac{1}{3}$$

Exemple du diagnostic

Supposons que :

- A soit l'événement atteint de la maladie M, et
- B soit l'événement positif pour le test diagnostic D.

Le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité pour qu'un patient positif pour le test diagnostique D soit atteint de M, en fonction de la probabilité (ou fréquence) de maladie M dans la population.

$$P(M \mid D^+) = \frac{P(D^+ \mid M)\, P(M)}{P(D^+ \mid M)\, P(M) + P(D^+ \mid \overline{M})\, P(\overline{M})}$$

Sensibilité et spécificité

Pour chaque individu examiné, nous nous intéressons aux caractères :

- *M* = avoir la maladie
- *non-M* = ne pas avoir la maladie
- *T* = avoir un résultats positif (+) au test
- *non-T* = avoir un résultat négatif (-) au test

Dans une phase d'évaluation, le test est appliqué à un groupe *M* et à un groupe *non-M*.

Les groupes sont formés à l'aide d'un test de référence (*gold standard*) dont le résultat est considéré comme sûr.

Sensibilité et spécificité

On détermine les fréquences des quatre résultats possibles indiqués par

$$n_{TM}, n_{T\overline{M}}, n_{\overline{T}M}, n_{\overline{TM}}$$

	M	$\overline{M}$	Total
T	n_{TM}	$n_{T\overline{M}}$	n_T
$\overline{T}$	$n_{\overline{T}M}$	$n_{\overline{TM}}$	$n_{\overline{T}}$
Total	n_M	$n_{\overline{M}}$	n

Sensibilité et spécificité

	M	$\overline{M}$	Total
T	n_{TM}	$n_{T\overline{M}}$	n_T
$\overline{T}$	$n_{\overline{T}M}$	$n_{\overline{TM}}$	$n_{\overline{T}}$
Total	n_M	$n_{\overline{M}}$	n

$Sensibilité = \frac{n_{TM}}{n_M}$ = proportion de '+' parmi les malades.

Sensibilité et spécificité

	M	$\overline{M}$	Total
T	n_{TM}	$n_{T\overline{M}}$	n_T
$\overline{T}$	$n_{\overline{T}M}$	$n_{\overline{TM}}$	$n_{\overline{T}}$
Total	n_M	$n_{\overline{M}}$	n

$$Spécificité = \frac{n_{\overline{TM}}}{n_{\overline{M}}}$$ = proportion de '-' parmi les sains.

Des valeurs élevées de sensibilité et de spécificité indiquent clairement une bonne qualité du test.

Sensibilité et spécificité - exemple

	M	$\overline{M}$	Total
T	*950*	*10*	
$\overline{T}$	*50*	*990*	
Total	*1000*	*1000*	

$$Sensibilité = \frac{n_{TM}}{n_M} = \frac{950}{1000} = 95\%$$

$$Spécificité = \frac{n_{\overline{TM}}}{n_{\overline{M}}} = \frac{990}{1000} = 99\%$$

Les autres mesures d'efficacité d'un test

La sensibilité et la spécificité du test ne sont pas des informations directement utiles à l'individu (le patient) auquel le test est administré.
En effet, supposons que la sensibilité et la spécificité d'un certain test soient :

- sensibilité = 95%
- spécificité = 99%

Supposons aussi que le médecin applique ce test à un patient et obtient un résultat positif (+).

Les autres mesures d'efficacité d'un test

Il s'agit de répondre à la question :
Quelle est la probabilité que le patient soit réellement malade ?

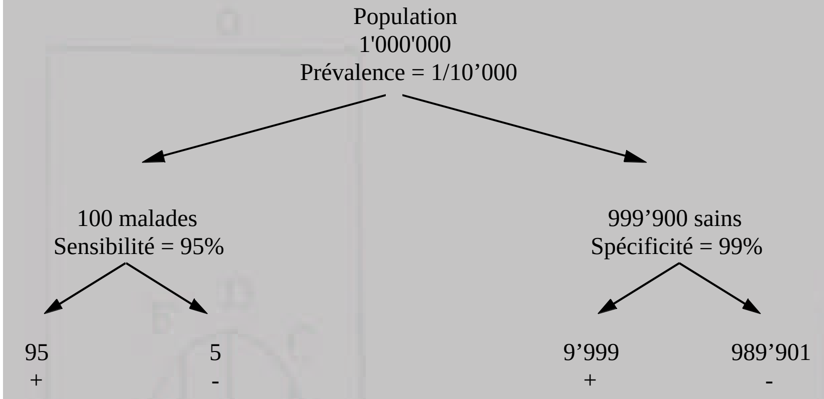
Pour répondre il nous faut une information supplémentaire concernant la fréquence de la maladie *M* dans la population, c'est-à-dire la *prévalence* de la maladie.
Supposons par exemple, qu'il y ait 1 seul malade par 10'000 habitants (*prévalence de M* = 1/10'000).

Première solution

La prévalence de 1/10’000 nous permet d’affirmer que dans une population hypothétique de 1’000’000 d’individus, on peut s’attendre à 100 malades et 999’900 sains.

Le test dépiste 95 cas positifs et 5 cas négatifs parmi les malades, car la sensibilité est de 95%.

Le test trouve aussi 9’999 résultats positifs et 989’901 résultats négatifs dans la partie saine de la population (voir schéma suivant).



Première solution

En conclusion, la proportion de malades parmi les cas positifs est de 95/10’094, ce qui indique que les chances qu’un individu positif au test soit réellement malade sont seulement de 0.0094 (approximativement 1%).

Solution avec la formule de Bayes

$P(M|T)$ = Probabilité que le patient soit malade donnée le résultat positif du test (sachant que le résultat du test est positif).

$$P(M|T) = \frac{\overbrace{P(T|M)}^{\text{sensibilité=0.95}}\ \overbrace{P(M)}^{\text{prévalence=0.0001}}}{P(T|M)\ P(M) + \underbrace{P(T|\overline{M})}_{\text{1-spécificité=0.01}}\ \underbrace{P(\overline{M})}_{\text{1-prévalence=0.9999}}}$$

Solution avec la formule de Bayes

$P(M|T)$ = Probabilité que le patient soit malade donnée le résultat positif du test (sachant que le résultat du test est positif).

$$P(M|T) = \frac{0.95 \;\; 0.0001}{0.95 \;\; 0.0001 + 0.01 \;\; 0.9999}$$

$$P(M|T) = 0.0094$$

Solution avec la formule de Bayes

Remarque :
Les valeurs de $P(T|M)$ et $P(non\text{-}T|non\text{-}M)$ dans la population sont inconnues.
Nous utilisons leurs estimations 95%, respectivement 99%, obtenus dans la phase d'évaluation à l'aide d'un échantillon de 1'000 malades et 1'000 sains.

Solution avec la formule de Bayes

0.0001 probabilité a priori

$\downarrow$

0.01 probabilité a posteriori

Terminologie

- $P(T|M)$ = sensibilité du test
- $P(non\text{-}T|non\text{-}M)$ = spécificité du test
- $P(M|T)$ = valeur prédictive positive du test
- $P(non\text{-}M|non\text{-}T)$ = valeur prédictive négative du test
- $P(T|non\text{-}M)$ = taux de faux positifs (= 1-spécificité)

Attention ! pour certains auteurs :
taux de faux positifs = $P(non\text{-}M|T)$.

Le rôle de la prévalence

Il est souvent difficile de connaître la prévalence $P(M)$ avec précision. Il convient alors d'examiner le test pour différentes valeurs de $P(M)$.
Par exemple, si $P(T|M)$=0.95 et $P(non\text{-}T|non\text{-}M)$=0.99

$P(M)$	$P(\overline{M} \mid T)$	$P(M \mid \overline{T})$
1/1'000'000	0.9999	0.00000
1/100'000	0.9991	0.00000
1/10'000	0.9906	0.00001
1/1'000	0.9132	0.00005
1/500	0.8401	0.00010
1/200	0.6769	0.00025
1/100	0.5103	0.00051

Le rôle de la prévalence

Le taux de faux négatifs est bon : moins de 5 malades sur 10'000 (~0.00051) échappent au test.
Par contre, le taux de faux positifs est élevé : sur 100 individus positifs plus de 50 (~0.5103) sont sains.
La décision de maintenir un tel test dépendra de l'importance de la maladie, des conséquences du test, des coûts des examens complémentaires et de l'éventuel traitement, des chances de succès du traitement, ect.
Il est important de savoir qu'on peut réduire les taux d'erreur en combinant (ou en répétant) deux ou plusieurs tests.

Combinaisons de deux ou plusieurs tests

Notations :

- M = le patient est malade
- T_1 = le premier test est positif
- T_2 = le deuxième test est positif
- *non-M* = le patient n'est pas malade
- *non-*T_1 = le premier test est négatif
- *non-*T_2 = le deuxième test est négatif

Hypothèse :
Les résultats des deux tests sont indépendants.

Combinaisons de deux ou plusieurs tests

Données :

- $P(M)$ = prévalence = 10%
- $P(T_1|M)$ = sensibilité du premier test = 75%
- $P(non\text{-}T_1|\ non\text{-}\ M)$ = spécificité du premier test = 80%
- $P(T_2|M)$ = sensibilité du deuxième test = 90%
- $P(non\text{-}T_2|\ non\text{-}\ M)$ = spécificité du deuxième test = 95%

Valeur prédictive positive (probabilité a posteriori) du premier test, $P(M|T_1)$?

Combinaisons de deux ou plusieurs tests

$$P(M \mid T_1) = \frac{P(T_1 \mid M)\ P(M)}{P(T_1 \mid M)\ P(M) + P(T_1 \mid \overline{M})\ P(\overline{M})}$$

$$P(M \mid T_1) = \frac{0.75\ \ 0.10}{0.75\ \ 0.10 + 0.20\ \ 0.90}$$

$$P(M \mid T) = 0.294$$

Valeur prédictive positive de la combinaison

Première approche, grâce à l'indépendance des résultats :

$$P(T_1\ et\ T_2 \mid M) = P(T_1 \mid M)\ P(T_2 \mid M) = 0.75\ \ 0.90 = 0.675$$

$$P(T_1\ et\ T_2 \mid \overline{M}) = P(T_1 \mid \overline{M})\ P(T_2 \mid \overline{M}) = 0.20\ \ 0.05 = 0.010$$

et donc :

$$P(M \mid T_1\ et\ T_2) = \frac{P(T_1\ et\ T_2 \mid M)\ P(M)}{P(T_1\ et\ T_2 \mid M)\ P(M) + P(T_1\ et\ T_2 \mid \overline{M})\ P(\overline{M})}$$

$$P(M \mid T_1\ et\ T_2) = \frac{0.675\ \ 0.100}{0.675\ \ 0.100 + 0.010\ \ 0.900} = 0.882$$

Valeur prédictive positive de la combinaison

Deuxième approche :

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{P_{T1}(T_2 \mid M)\; P_{T1}(M)}{P_{T1}(T_2 \mid M)\; P_{T1}(M) + P_{T1}(T_2 \mid \overline{M})\; P_{T1}(\overline{M})}$$

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{0.900\;\;0.294}{0.900\;\;0.294 + 0.050\;\;0.706} = 0.882$$

Valeur prédictive positive de la combinaison

Deuxième approche :

Après avoir obtenu le résultat T_1, nous interprétons $P_{T1}(M)=P(M|T_1)$ comme 'prévalence de M parmi les résultats T_1'

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{P_{T1}(T_2 \mid M)\; P_{T1}(M)}{P_{T1}(T_2 \mid M)\; P_{T1}(M) + P_{T1}(T_2 \mid \overline{M})\; P_{T1}(\overline{M})}$$

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{0.900\;\;0.294}{0.900\;\;0.294 + 0.050\;\;0.706} = 0.882$$

Valeur prédictive positive de la combinaison

Après avoir obtenu le résultat T_1, nous interprétons $P_{T1}(M)=P(M|T_1)$ comme 'prévalence de M parmi les résultats T_1'

Deuxième approche :

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{P_{T1}(T_2 \mid M)\, P_{T1}(M)}{P_{T1}(T_2 \mid M)\, P_{T1}(M) + P_{T1}(T_2 \mid \overline{M})\, P_{T1}(\overline{M})}$$

Grâce à l'indépendance des résultats, $P_{T1}(T_2|M)=P(T_2|M)$

$$P_{T1}(M \mid T_2) = \frac{0.900 \cdot 0.294}{0.900 \cdot 0.294 + 0.050 \cdot 0.706} = 0.882$$

Les affaires de paternité et la jurisprudence en Suisse

Le théorème de Bayes est accepté.

CC art. 254. Empreinte génétique.

L'analyse dite ADN est une méthode scientifique nouvelle, reconnue pour l'essentiel, pour constater la paternité.

Revue Suisse de Jurisprudence 88 (1992) 24 : 430-434.

La conclusion dans les affaires de paternité

« Dans le trio X [enfant], Y [mère] et Z [père présumé], la probabilité de paternité selon Essen-Möller est très largement supérieure à 99.999%. L'évaluation est donc : paternité pratiquement prouvée. »

Le processus du raisonnement

50%

Probabilités a priori

Autres informations (dossier)

se combinent avec

Rapport de vraisemblance

Profils génétiques de la M,E et PP

99.999%

Probabilités a posteriori

Décision sur la paternité

Le rôle de l'expert

Expert

se combinent avec

Probabilités a priori → Rapport de vraisemblance → Probabilités a posteriori

Le juge ou la Cour (Probabilités a priori)

Le juge ou la Cour (Probabilités a posteriori)

La *'odds form'* du théorème de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A})\,P(\bar{A})}{P(B)}$$

$$\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} = \frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}\,\frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

La ‘*odds form*’ du théorème de Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

$$P(\bar{A} \mid B) = \frac{P(B \mid \bar{A})\, P(\bar{A})}{P(B)}$$

Bayes’ factor

Likelihood ratio

$$\frac{P(A \mid B)}{P(\bar{A} \mid B)} = \frac{P(B \mid A)}{P(B \mid \bar{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$