Les lois des probabilités

Cours

'Interprétation de la preuve'

(4)



Les lois des probabilités décrivent les valeurs que les probabilités peuvent prendre ainsi que la façon avec laquelle elles se combinent.

➔ Premièrement, les lois concernant les événements qui ne sont <u>pas conditionnés</u> à aucune autre information ;

➔ Deuxièmement, les lois relatant des événements qui sont <u>conditionnés</u> à d'autres informations.

## Première loi des probabilités

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq P(E) \leq 1 \\ P(E) = 1 \text{ pour tout } E \end{array}\right\}$$

- A partir de ça et en utilisant la deuxième loi, on déduit que si une proposition est fausse, elle a une probabilité égale à 0.
- Cette loi est également connue sous le nom de '*convexity rule*'.
- Cette loi se réfère à un seul événement. Par contre, les prochaines deux lois relatent de combinaisons d'événements.

## Première loi des probabilités (événements dépendants)

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq P(H \mid E) \leq 1 \\ P(H \mid H) = 1 \text{ pour tout } H \\ P(\overline{H} \mid H) = 0 \end{array}\right\}$$

- la valeur de l'événement est conditionnée (|) aux données qui nous sont connues ('*background information*') ;
- l'estimation des fréquences alléliques d'un profil ADN est conditionnée à l'information sur l'ethnie de l'agresseur ;
- l'estimation de la distribution de l'indice de réfraction des verre est conditionnée au type de verre à l'origine des fragments retrouvés.

## Deuxième loi des probabilités

- Si *R* et *S* sont des événements mutuellement exclusifs, la probabilité '*R ou S*' ('*disjunction*') est égale à la somme des probabilités de *R* et de *S*.

$$P(R \text{ ou } S) = P(R) + P(S)$$

- Imaginons de choisir une carte dans un jeu avec *R* définit comme étant le choix de 'trèfle' et *S* le choix de 'pique'.
- $P(R) = 1/4$
- $P(S) = 1/4$
- $P(R \text{ et } S) = 0$ (en effet, une carte peut être trèfle, pique, aucun des deux, mais pas les deux à la fois).
- Par conséquent, la probabilité que la carte choisie est de couleur noire, $P(R \text{ ou } S)$ est 1/2 : $P(R) + P(S)$.

## Deuxième loi des probabilités

- Imaginons de lancer un dé ; la probabilité qu'un numéro (n'importe lequel) sort est 1/6.
- Si on se pose la question : quelle est la probabilité qu'un numéro pair va sortir ? la réponse est alors 1/2 (il faut donc additionner les probabilités pour qu'il sort le 2, le 4 et ou le 6).
- Ces événements sont *mutuellement exclusifs*. Si n'importe lequel sort, alors aucun autre ne peut sortir.
- L'événement 'numéro pair' est satisfait par le n.2 OU le n.4 OU le n.6.
- Si deux événements sont mutuellement exclusifs et si on désire connaître qu'un ou l'autre soit vrai, alors nous additionnons leur probabilités :

$$P(G \text{ ou } H \mid E) = P(G \mid E) + P(H \mid E)$$

## Généralisation de la deuxième loi

➔ Si $H_i$, $i = 1, 2, ..., r$, sont des événements mutuellement exclusifs sachant $E$, alors

$$P(H_1 \text{ ou } H_2 \text{ ou} \dots \text{ou } H_r \mid E) =$$
$$= P(H_1 \mid E) + P(H_2 \mid E) + \dots + P(H_r \mid E)$$
$$\sum_i P(H_i \mid E)$$

## Corollaire à la I<sup>ère</sup> et de la II<sup>ème</sup> loi

➔ Si $P(H|E)$ est la probabilité que $H$ soit vraie (ou que l'événement $H$ se passe), alors

➔ $P(non\text{-}H|E)$ représente la probabilité que $H$ soit faux (ou que l'événement $H$ ne se passe pas).

➔ Sachant que ces deux événements sont mutuellement *exclusifs*, alors

$$P(H \text{ ou } \overline{H} \mid E) = P(H \mid E) + P(\overline{H} \mid E)$$

➔ Ces événements sont également *exhaustifs* (ensemble ils couvrent tout l'étendu des probabilités - un ou l'autre doit être vrai), ainsi

$$P(H \mid E) + P(\overline{H} \mid E) = 1$$
$$P(\overline{H} \mid E) = 1 - P(H \mid E)$$
$$P(\overline{H} \mid H) = 1 - P(H \mid H) = 0$$

## Troisième loi des probabilités

- La troisième loi des probabilités relate de la conjonction (‘*conjunction*’) de deux événements.
- Ces deux événements sont considérés comme étant indépendants. C’est-à-dire, que la connaissance de la réalisation d’un des deux événements n’influence pas la probabilité sur l’occurrence de l’autre.
- Imaginons par exemple de lancer deux dés à six faces, *A* et *B* par exemple. Le résultat du jet *A* n’affecte pas le résultat du jet *B*.
- Si R et S sont deux événement indépendants, alors

$$P(R\ et\ S) = P(R) \times P(S)$$

- Définition de l’indépendance
- Symétrie
- Généralisation :

$$P(S_1\ et\ S_2\ et \dots et\ S_n) = P(S_1) \times P(S_2) \times \dots \times P(S_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(S_i)$$

## Troisième loi des probabilités

- Deux événements <u>indépendants</u> et la connaissance d’informations supplémentaires (*background informations*).

$$P(R\ et\ S \mid I) = P(R \mid I) \times P(S \mid I)$$

- La loi est identique à la précédente sauf que l’information *I* conditionne les probabilités des deux événements.

## Troisième loi des probabilités

➔ Deux événements <u>dépendants</u> et la connaissance d'informations supplémentaires (*background informations*).

$$P(R\ et\ S \mid I) = P(R \mid I) \times P(S \mid R\ et\ I)$$

➔ Exemple : la probabilité de sélectionner deux 'as' est :

$$P(R\ et\ S \mid I) = P(R \mid I) \times P(S \mid R\ et\ I) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$$

➔ Exemple : Génétique.

## Généralisation de la troisième loi

➔ Pour tous les événements $H_i$, $i = 1, 2, ..., r$,

$$P(H_1\ et\ H_2\ et \ldots et\ H_r \mid E) =$$
$$= P(H_1 \mid H_2, H_3, \ldots, H_r, E) \times P(H_2 \mid H_3, \ldots, H_r, E) \times P(H_r \mid E)$$

Exemple : III$^{ème}$ loi des probabilités

| *Tests 1/2* | + | - | *Total* |
|---|---|---|---|
| + | 34 | 26 | 60 |
| - | 36 | 4 | 40 |
| *Total* | 70 | 30 | 100 |

➔ $P(R) = 0.6$

➔ $P(S) = 0.7$

➔ Si les deux tests sont indépendants, la probabilité qu'une personne/objet sélectionnée de façon aléatoire dans la population soit + +, $P(R\ et\ S)$ est

$$P(R\ et\ S) = P(R) \times P(S) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

Exemple : III$^{ème}$ loi des probabilités

| *Tests 1/2* | + | - | *Total* |
|---|---|---|---|
| + | 34 | 26 | 60 |
| - | 36 | 4 | 40 |
| *Total* | 70 | 30 | 100 |

➔ Aucune information ne justifie que 42% de la population considérée soit ++ et donc que les deux tests soient indépendants.

$$P(R\ et\ S) \neq P(R) \times P(S)$$

➔ On peut vérifier la III$^{ème}$ loi pour des événements dépendants à travers les résultats de la table ci-dessus.

## Exemple : III$^{ème}$ loi des probabilités

| *Tests 1/2* | + | - | *Total* |
|---|---|---|---|
| + | 34 | 26 | 60 |
| - | 36 | 4 | 40 |
| *Total* | 70 | 30 | 100 |

➔ Parmi les 60 personnes/objets + pour le test 1 (*R*), il y en a 34 qui sont également + pour le test 2 (*S*).

➔ Donc, P(*S*|*R*) = 34/60 = 0.68

$$P(R\ et\ S) = P(R) \times P(S \mid R) = \frac{60}{100} \times \frac{34}{60} = 0.34$$

➔ *P*(*R et S*) = 0.34 peut se déduire directement du tableau.

## Loi des probabilités totales

➔ Cette loi est également appelée ‘loi de l’extension de la conversation (‘*extension of the conversation*’).

➔ D.V. Lindley, Probability. In C.G.G. Aitken, D.A. Stoney (Eds.), *The use of statistics in forensic science*, Ellis Horwoord, New York (1991) 27-50 ;

➔ D.V. Lindley, Foundations, In G. Wright, P. Ayton (Eds.), *Subjective probability*, John Wiley & Sons, New York (1994) 3-15.

➔ Si A et B sont deux événements mutuellement exclusifs et exhaustifs (*B* = *non-A*), alors pour tout autre événement *H*, la loi dit que

$$P(H) = P(H \mid A) \times P(A) + P(H \mid B) \times P(B)$$

On utilise cette formule quand on est intéressés à évaluer la probabilité d’un événement qui dépend de plusieurs autres événements eux mêmes mutuellement exclusifs.

## Exemple

- La population de la Nouvelle-Zélande est divisée comme suit:
  - 83.47% Caucasiens
  - 12.19 Maoris
  - 4.34 Polynésiens
- Les probabilités de retrouver le même génotype YNH24 que celui détecté dans la trace s'il s'agit d'une personne caucasienne, Maori ou polynésienne est
  - 0.013, 0.045 et 0.039, respectivement.
- *Quelle est la probabilité de retrouver ce génotype dans une personne choisie au hasard dans la population néo-zélandaise ?*

## Exemple

- *Quelle est la probabilité de retrouver ce génotype dans une personne choisie au hasard dans la population néo-zélandaise ?*
  - *E*, génotype
  - *Ca*, caucasien
  - *Ma*, Maori
  - *Po*, Polynésien

$$P(E) = P(E \mid Ca) \times P(Ca) + P(E \mid Ma) \times P(Ma) + P(E \mid Po) \times P(Po)$$
$$P(E) = 0.013 \times 0.8347 + 0.045 \times 0.1219 + 0.039 \times 0.0434$$
$$P(E) = 0.018$$

## Exercice : loi des probabilités

- Un dé est lancé.
- Imaginons que $E$ représente l'information que le dé montre un numéro pair.
- $H_1$ est l'événement 'le dé montre le numéro 2'.
- $H_2$ est l'événement 'le dé montre le numéro 4'.

➔ Quelle est la valeur de $P(H_1|E)$ ?
➔ Quelle est la valeur de $P(H_1 \text{ ou } H_2|E)$ ?
➔ Quelle est la valeur de $P(\text{non-}H_1|E)$ ?
➔ Quelle est la valeur de $P(H_1|\text{non-}E)$ ?

## La notion de 'chance' (*odds*)

- $P(H)$ représente la probabilité de $H$.
- Les chances en faveur de $H$ sont :

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\overline{H})}$$

$$O(H) = \frac{P(H)}{1 - P(H)}$$

$O(H)$ est le rapport entre deux probabilités et donc il peut prendre toute valeur entre 0 (quand $H$ est fausse) et $\infty$ (quand $H$ est vraie).

## La notion de 'chance' (*odds*) : exemple

- Imaginons le jet d'un dé.
- La probabilité que lors du prochain jet le numéro 3 sortira est 1/6 et la probabilité que ce numéro ne sortira pas est 5/6.
- Les chances en faveur du numéro 3 sont :

$$O(3)=\frac{P(3)}{P(\bar{3})}=\frac{1/6}{5/6}=\frac{1}{5}$$

Quand les chances sont < 1 on parle de 'chances contre' et on peut les inverser : chances de 5 à 1 contre l'événement.
Si $O(H) > 1$ on parle de 'chances en faveur'.

## Des 'chances' aux probabilités

- Imaginons de connaître les chances 'contre' un événement.
- Par exemple : 5 à 1 contre le résultat 'n. 3'.

$$\frac{P(\bar{3})}{P(3)}=\frac{1-P(3)}{P(3)}=\frac{5/6}{1/6}=5$$

$$1-P(3)=5\ P(3)$$

$$1=\{5\ P(3)\}+P(3)=6\ P(3)$$

$$P(3)=\frac{1}{6}$$